

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

## **Математичне моделювання систем і процесів**

(частина V)

### **Вступ до теорії дифракції електромагнітних хвиль**

Конспект лекцій

для підготовки магістрів

з галузі знань 15 Автоматизація та приладобудування  
за спеціальністю 153 мікро – та наносистемна техніка

Київ – 2017

Навчальне видання

**Математичне моделювання систем і процесів**

(частина V)

**Вступ до дифракції електромагнітних хвиль**

Конспект лекцій

для підготовки магістрів

з галузі знань 15 Автоматизація та приладобудування  
за спеціальністю 153 мікро – та наносистемна техніка

Укладач

*Лошицький Павло Павлович, проф.*

Відповідальний редактор

*В.І.Тимофєєв, проф.*

Рецензент

к.т.н. ,доцент кафедри мікроелектроніки

Національного технічного університету України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

*Т.Л.Волхова, доц.*

У методичних вказівках викладени математичні методи вирішення завдань дифракції монохроматичних електромагнітних хвиль. Розібрани як точні так і наближені методи розрахунку дифракції і проведено порівняння результатів для найпростіших еталонних завдань.

## Зміст

I.	ВСТУП.....	5
1.1.	Дифракція електромагнітних хвиль.....	5
1.2.	Основні принципи в теорії електромагнітного поля.....	6
2.	РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ МЕТОДАМИ ОПТИКИ.....	13
2.1.	Метод геометричної (променевої) оптики.....	13
2.2.	Метод хвильової оптики.....	19
3.	ВЕКТОРИЗОВАНІ ФОРМИ ІНТЕГРАЛА КІРХГОФА.....	43
3.1.	Загальні зауваження.....	43
3.2.	Формули Стреттона і Чу.....	45
3.3.	Рішення за допомогою принципу еквівалентності.....	49
3.4.	Про фізичний зміст терміну «листок магнітного струму».....	53
3.5.	Хвильова теорія електромагнітного поля. Принцип Гюйгенса-Кірхгофа .....	56
4.	МЕТОД КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ. ДИФРАКЦІЯ ВІД ЦИЛІНДРА.....	83
5.	МЕТОД ВІНЕРА-ХОПФА.....	120
	Додаток	
1.	Функція плоскої хвилі, однозначна на поверхні Рімана.....	137
2.	Рішення рівняння Лапласа в циліндричних координатах. Рівняння Бесселя.....	148
3.	Ейлерова функція гама.....	160
4.	Різні типи циліндричних функцій.....	161
5.	Рекурентні формули.....	176
6.	Література .....	183

# 1. ВСТУП

## 1.1. Дифракція електромагнітних хвиль

Електромагнітне поле, створюване розповсюджуючою електромагнітною хвилею, буде різним при проходженні хвилі у вільному просторі і в просторі, заповненому сторонніми тілами. Ця відмінність пов'язана з тим, що електромагнітна хвиля, падаючи на будь-який об'єкт, викликає збудження коливань вільних і зв'язаних зарядів. Вимушені коливання створюють в навколишньому просторі і всередині тіла вторинне електромагнітне поле, що змінюється з частотою падаючої хвилі. Вторинне електромагнітне поле разом з полем падаючої хвилі утворюють результуюче електромагнітне поле. Дане явище носить назву дифракції електромагнітних хвиль.

Терміни «дифракція» і «розсіювання», зазвичай вживаються в різних випадках, насправді позначають різні сторони одного і того ж фізичного процесу. Якщо відбувається одне з цих явищ, то має місце й інше. Нехай яке-небудь тіло розсіює радіохвилі; розсіяне їм поле визначається як різниця між полем у присутності розсіюючого тіла і полем, яке було б у відсутність розсіювача (при тих же джерелах поля). Дифраговане поле визначається як повне поле при наявності розсіюючого тіла. Таким чином, дифраговане поле дорівнює сумі «падаючого» поля (тобто поля джерел у відсутність розсіювача) і розсіяного поля.

Задачі за розрахунком результуючого поля (або вторинного поля) називаються дифракційними. До таких задач відносяться, зокрема, огинання хвилями різних перешкод, проникнення хвиль крізь отвори, решітки або прозорі перешкоди, тобто вплив неоднорідностей в лініях каналізації енергії високої частоти, віддзеркалення і поглинання хвиль різними об'єктами, збудження і випромінювання хвиль поверхнями, розрахунок різних антен та інші питання.

Рішення дифракційних задач, як і взагалі граничних задач електродинаміки, характеризується своєю математичною складністю,

обумовленої складністю самого механізму поширення хвильових процесів. Найчастіше ця математична складність є непереборною перешкодою на шляху отримання точних рішень. Суворе рішення дифракційних задач можна провести тільки для тіл, що мають найпростішу форму. У більшості ж випадків практичні задачі дифракції зазвичай вирішуються наближено.

Відомі такі строгі методи розв'язання задач дифракції електромагнітних хвиль:

- метод криволінійних координат;
- метод Зоммерфельда – Малюжинця (прикладеного тільки до випадку дифракції на клині);
- метод інтегральних рівнянь.

Наближені вирішення тих же задач отримують з принципу Гюйгенса - Френеля, застосовуючи формулу Кірхгофа в класичній або векторній формі, яка може бути отримана або на підставі векторного аналога формули Гріна або за допомогою принципу еквівалентності.

Справжня робота присвячена розгляду математичних методів, застосовуваних при вирішенні найпростіших (еталонних) завдань дифракції і розсіювання електромагнітних хвиль.

## 1.2. Основні принципи в теорії електромагнітного поля

Нагадаємо загальні теореми і принципи в теорії електромагнітного поля, які можуть служити для обґрунтування правильності отриманих рішень або для розповсюдження рішень, отриманих для одних завдань, на інші.

1. Одним з найбільш важливих теорем є *теорема про єдиність* рішення рівнянь Максвелла. Ця теорема відповідає на питання про те, які умови необхідні і достатні для того, щоб отримати єдине рішення для зовнішніх і внутрішніх граничних задач електродинаміки.

Теорема єдиності, визначальна ці умови, стверджує, що електромагнітне поле в будь-який момент часу в будь-якій точці заданого об'єму, обмеженого поверхнею  $S$ , визначається рівняннями Максвелла однозначно, якщо в кожній

точці цього обсягу задані початкові значення векторів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{H}$  і, якщо відомі граничні значення проекцій одного з векторів ( $\mathbf{E}$  або  $\mathbf{H}$ ) в точках поверхні  $S$ , для будь-якого моменту часу.

2. Рішення неоднорідних рівнянь Максвелла для необмеженого простору представляють на великих відстанях від збудливих джерел біжучі хвилі.

Прийнято говорити, що віддаляючі від джерел на нескінченність хвилі задовольняють умові випромінювання на нескінченності, якщо для будь-якої функції  $\Psi$ , що задовольняє хвильовому рівнянню, ця умова записується у вигляді

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} + ik \Psi \right) = 0.$$

Для вирішення граничних задач електродинаміки для безмежних областей необхідно завжди дбати про те, щоб одержуване рішення задовільняло умові випромінювання. Ця умова вперше була сформульована Зоммерфельдом.

3. Лемма Лоренца є допоміжним математичним співвідношенням, яке має важливе значення в граничних задачах електродинаміки.

Нехай поле  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  збуджується сторонніми струмами  $\mathbf{j}_1^e$  і  $\mathbf{j}_1^m$ , а поле  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  збуджується сторонніми струмами  $\mathbf{j}_2^e$  та  $\mathbf{j}_2^m$ . Обидва електромагнітних процеси задовольняють рівнянням Максвелла, мають одну і ту ж частоту  $\omega$  і відбуваються в одному і тому ж просторі. Тоді співвідношення:

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2] - \operatorname{div}[\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_1] = 4\pi/c (\mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1 - \mathbf{j}_1^m \mathbf{H}_2 + \mathbf{j}_2^m \mathbf{H}_1)$$

являє собою лемму Лоренца в диференціальній формі, а співвідношення

$$\int_S \left( [\bar{\mathbf{E}}_1 \bar{\mathbf{H}}_2] - [\bar{\mathbf{E}}_2 \bar{\mathbf{H}}_1] \right) \bar{n} dS = \frac{4\pi}{c} \int_V (\bar{\mathbf{j}}_1^e \bar{\mathbf{E}}_2 - \bar{\mathbf{j}}_2^e \bar{\mathbf{E}}_1 - \bar{\mathbf{j}}_1^m \bar{\mathbf{H}}_2 + \bar{\mathbf{j}}_2^m \bar{\mathbf{H}}_1) dV$$

- лемма Лоренца в

найбільш загальному вигляді.

4. *Теорема еквівалентності* говорить: «поле у вільній від джерел області  $V$ , обмеженої поверхнею  $S$ , може бути створене електричними і магнітними струмами, розподіленими по цій поверхні, і в цьому сенсі дійсні джерела поля замінюються «еквівалентними» поверхневими струмами».

5. Задамо в обсязі  $V$  розглядаючого простору розподіл сторонніх електричних і магнітних струмів  $\mathbf{j}_1^e, \mathbf{j}_1^m$ . Збуджуване цими струмами поле позначимо через  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ . Залишивши частоту коливань  $\omega$  незмінною, задамо в тому ж середовищі інший розподіл сторонніх струмів  $\mathbf{j}_2^e, \mathbf{j}_2^m$ , а збуджене ними поле позначимо  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ .

З леми Лоренца слідує формулювання *теорему взаємності*:

$$\int_V (\bar{j}_1^e \bar{E}_2 - \bar{j}_1^m \bar{H}_2) dV = \int_V (\bar{j}_2^e \bar{E}_1 - \bar{j}_2^m \bar{H}_1) dV.$$

Сенс *теорему взаємності* зводиться до наступного. Якщо відсутні сторонні магнітні струми, то потенціал, що наводиться на провіднику (2) зарядом  $Q_1$  провідника (1), дорівнює потенціалу, що наводяться на провіднику (1) таким же зарядом, що знаходяться на провіднику (2).

Виходячи з принципу взаємності, можна стверджувати, що конструкція пристрою, призначеного для порушення хвиль певного типу, або для добування енергії з хвилі того ж типу, повинні бути однаковими.

6. Рівняння Максвелла, що описують електричні і магнітні джерела, можуть бути отримані одне з іншого при перестановках:

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}; \quad \varepsilon \leftrightarrow -\mu; \quad \mathbf{j} \leftrightarrow -\mathbf{j}_m; \quad \rho \leftrightarrow -\rho_m.$$

Якщо відомо рішення задачі в області  $V$  для поля, створеного електричними джерелами, зробивши наведену вище перестановку, можна одержати рівняння Максвелла для поля з магнітним джерелом, розташованим у просторі аналогічно електричному джерелу. Дана властивість отримала назву *переставної подвійності* рівнянь Максвелла.



7. При знаходженні електромагнітних полів в неоднорідних середовищах, корисно вводити поняття про електричні і магнітні *токи поляризації*. Ці струми поляризації можуть розглядатися при визначенні полів як сторонні струми, розташовані в однорідному просторі,

$\mathbf{j}_{\text{пол}}^e = \omega(\epsilon - \epsilon_1)\mathbf{E}$  - *електричний струм поляризації*;

$\mathbf{j}_{\text{пол}}^m = \omega(\mu - \mu_1)\mathbf{H}$  - *магнітний струм поляризації*,

де  $\epsilon$  і  $\mu$  - діелектрична і магнітна проникності неоднорідного середовища;

$\epsilon_1$  і  $\mu_1$  - довільно вибрані діелектрична і магнітна проникності.

Таким чином, введення *струмів поляризації* дозволяє неоднорідні середовища звести до однорідних.

8. Два екрани  $S_1$  та  $S_2$  називаються «додатковими», якщо один з них «непрозорий» там, де другий має отвір, і навпаки: разом вони утворюють замкнену поверхню  $S$ .

Нехай  $V_1(S_1)$  є поле за екраном  $S_1$  (якщо дивитися з боку джерела),  $V_2(S_2)$  - поле за екраном  $S_2$ . Тоді  $V_1(S_1) + V_2(S_2) = V_0$ , де  $V_0$  - падаюча хвиля. У цьому полягає *теорема (принцип) Бабіне* в теорії Кірхгофа, тобто два додаткові екрани утворюють дифракційну картину так, що їх вектори коливань в кожній точці доповнюють один одного до необуреного коливання падаючої електромагнітної хвилі, яка мала б місце у відповідній точці при відсутності екранів.

### 1.3. Рівняння Максвела

Вихідним пунктом для точного розв'язку задач дифракції та розсіювання є рівняння Максвела.

Вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{div } \vec{D} &= \rho, \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, & \text{div } \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де  $\vec{E}$  - вектор напруженості електричного поля,

$\vec{H}$  – вектор напруженості магнітного поля,

$\vec{D}$  – вектор електричної індукції,

$\vec{B}$  – вектор магнітної індукції,

$\vec{J}$  – щільність електричного струму,

$\rho$  – щільність електричного заряду.

Оскільки зазвичай розглядають поля, гармонічні у часі, то при часовій залежності  $e^{i\omega t}$  рівняння (1.1) приймають вигляд

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -i\omega \vec{B}, & \text{div } \vec{D} &= \rho, \\ \text{rot } \vec{H} &= i\omega \vec{D} + \vec{J}, & \text{div } \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

У випадку однорідного середовища, що не містить зарядів і має проникності  $\mu$  та  $\epsilon$  і провідність  $\sigma$ , кожен з векторів поля  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  повинен задовольняти векторне рівняння Гельмгольца

$$\text{rot rot } \vec{F} = k^2 \vec{F}, \quad (1.3)$$

де  $\vec{F}$  значить або  $\vec{E}$ , або  $\vec{H}$  і

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - i\omega \mu \sigma.$$

Розв'язок задачі розсіювання лежить у знаходженні розв'язку рівняння (1.3), що задовольняє заданим граничним умовам на поверхні розсіювача та має відповідну поведінку на нескінченності. Якщо розсіювач, розміщений у вільному просторі, має скінченну (не нескінченно велику) провідність, то всередині розсіювача буде деяке повне поле ( $\vec{E}_i, \vec{H}_i$ ), а за його межами ( $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ ). Граничні умови в кожній точці поверхні розсіювача запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} [\vec{n}, (\vec{E}_i - \vec{E}_0)] &= 0, & \vec{n} \cdot (\vec{D}_i - \vec{D}_0) &= 0, \\ [\vec{n}, (\vec{H}_i - \vec{H}_0)] &= 0, & \vec{n} \cdot (\vec{B}_i - \vec{B}_0) &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де  $\vec{n}$  – одинична нормаль до поверхні розсіювача, що зазвичай направлена назовні.

Якщо ж провідність розсіювача нескінченно велика, як зазвичай вважають для металічних розсіювачів у радіолокації, то поле всередині розсіювача рівне нулю та умови (1.4) зводяться до наступних:

$$\begin{aligned} [\vec{n}, \vec{E}_0] &= 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{B}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для забезпечення єдиності розв'язку задачі розсіювання на тілі кінцевих розмірів достатньо додати до граничних умов (1.4) чи (1.5) вимогу, щоб розсіяне поле на великих відстанях від розсіювача мало вигляд сферичних хвиль, що розходяться. Для скалярної хвильової функції  $\psi$  ця умова математично записується наступним чином:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial \psi}{\partial R} + ik\psi \right) = 0, \quad (1.6)$$

де  $R$  – відстань від розсіювача до точки спостереження.

#### 1.4. Вектор Герца

При розв'язку рівнянь Максвела для опису полів вводяться різні допоміжні величини. Певну перевагу має *вектор Герца*, оскільки при його введенні не порушується рівняння неперервності та виходить обмежитися розглядом тільки однієї величини. Для лінійного ізотропного середовища маємо.

Оскільки  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ , то вектор  $\vec{H}$  є соленоїдальним та може бути виражений через ротор деякого вектора  $\vec{P}$

$$\vec{H} = j\omega \cdot \epsilon \cdot \operatorname{rot} \vec{P} \quad (1.7)$$

Знаходимо  $\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \cdot \mu \cdot (j\omega \cdot \epsilon \cdot \operatorname{rot} \vec{P}) = \omega^2 \mu \epsilon \cdot \operatorname{rot} \vec{P} = k^2 \operatorname{rot} \vec{P}$ . Оскільки  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$ , то інтеграл цього рівняння має вигляд

$$\vec{E} = k^2 \vec{P} - \operatorname{grad} \phi \quad (1.8)$$

де  $\phi$  – довільна скалярна функція.

Підставляємо  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , отримуємо

$$\text{rot} (j\omega \cdot \epsilon \cdot \text{rot} \vec{\Pi}) = j\omega \cdot \epsilon [k^2 \vec{\Pi} - \text{grad} \phi] + \vec{J},$$

$$\text{rot rot} \vec{\Pi} = k^2 \vec{\Pi} - \text{grad} \phi - j \frac{\vec{J}}{\omega \epsilon}. \quad (1.9)$$

Прийmemo довільну функцію  $\phi = -\text{div} \vec{\Pi}$  і підставимо в (1.9):

$$\text{rot rot} \vec{\Pi} = k^2 \vec{\Pi} - \text{grad div} \vec{\Pi} - j \frac{\vec{J}}{\omega \epsilon},$$

$$\text{grad div} \vec{\Pi} - \text{rot rot} \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = j \frac{\vec{J}}{\omega \epsilon}. \quad ($$

(1.10)

Вираз (1.10) – неоднорідне хвильове рівняння, якому повинен задовольняти вектор Герца. У декартовій системі координат воно спрощується:

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{\Pi} = j \frac{\vec{J}}{\omega \epsilon}, \quad (1.11)$$

де  $\nabla^2 = \text{grad div} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$

Рівняння (1.11) має частковий розв'язок:

$$\vec{\Pi} = \frac{-j}{4\pi\omega\epsilon} \int \frac{\vec{J} \cdot e^{-jkr}}{r} d\tau, \quad (1.12)$$

де  $d\tau$  – елемент об'єму,  $r$  – відстань до  $d\tau$  від точки спостереження поля.

Вектор  $\vec{\Pi}$  пов'язаний з вектором щільності електричного струму  $\vec{J}$ , тому його називають *електричним вектором Герца*. Вираз (12) векторний і його вигляд не залежить від вибору системи координат. Тому розв'язок (12) є загальним і через нього можна знайти електричне і магнітне поля

$$\vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi} + k^2 \Pi, \quad (1.13)$$

$$\vec{H} = j\omega \cdot \varepsilon \cdot \text{rot } \vec{\Pi}. \quad (1.14)$$

У загальному випадку до отриманого виразу для  $\vec{\Pi}$  необхідно додати розв'язок однорідного хвильового рівняння, що залежить від граничних умов конкретної задачі та пов'язані з джерелами, що розташовані поза областю, що спостерігається.

За відсутності сторонніх струмів рівняння Максвелла мають певну симетрію щодо  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$ , що не знайшло відображення в (1.13) та (1.14). Хоча ці співвідношення повні, за відсутності сторонніх джерел їм можна надати

іншу форму, якщо виходити з умови, що  $\text{div } \vec{E} = 0$ , а не  $\text{div } \vec{H} = 0$ . Тоді

$$\vec{E} = -j\omega \cdot \mu \cdot \text{rot } \vec{\Psi}, \quad (1.15)$$

$$\vec{H} = \text{grad div } \vec{\Psi} + k^2 \vec{\Psi}, \quad (1.16)$$

де  $\vec{\Psi}$  – розв'язок однорідного хвильового рівняння.

$$\text{grad div } \vec{\Psi} - \text{rot rot } \vec{\Psi} + k^2 \vec{\Psi} = 0. \quad (1.17)$$

Можна показати, що сума отриманих розв'язків

$$\vec{E} = (\text{grad div} + k^2) \vec{\Pi} - j\omega \cdot \mu \cdot \text{rot } \vec{\Psi}, \quad (1.18)$$

$$\vec{H} = j\omega \cdot \varepsilon \cdot \text{rot } \vec{\Pi} + (\text{grad div} + k^2) \vec{\Psi}, \quad (1.19)$$

де  $\vec{\Pi}$  є розв'язком (1.12), а  $\vec{\Psi}$  – розв'язком (1.17), що задовольняють рівнянням Максвелла.  $\vec{\Psi}$  – *магнітний вектор Герца*.

## 2. РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІІ МЕТОДАМИ ОПТИКИ

## 2.1. Метод геометричної (променевої) оптики

Геометрична оптика вирішує завдання про обчислення шляху світлових променів в середовищі з заданими оптичними властивостями. Якщо середовище однорідне, то промені поширюються по прямих лініях; в загальному випадку траєкторії променів можна знайти, наприклад за допомогою принципу Ферма, що стверджує, що при русі електромагнітної хвилі в просторі, довжина оптичного шляху між відповідними точками хвильових поверхонь екстремальна, тобто має або максимальне, або мінімальне значення. Принцип Ферма, отже, дає можливість визначити істинний шлях «променя» від точки джерело до точки спостереження. З цього принципу випливає, що при поширенні в однорідному середовищі «промені» мають характер прямих ліній, а також з нього можна вивести основні закони відбиття і заломлення.

Так як нас цікавлять тільки ті випадки, коли середовище є однорідним, ізотропним і обмежений ідеально-відбиваючими тілами, то для нас достатньо наступних положень геометричної оптики:

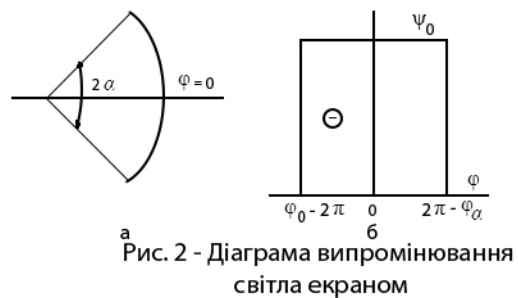
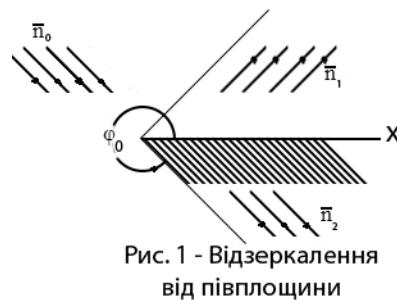
1. Падаючий промінь, відбитий промінь і перпендикуляр до поверхні, що відбиває в точці відображення лежать в одній площині.
2. Кут відбиття дорівнює куту падіння.
3. Ідеально-відбиває поверхня характеризується коефіцієнтом відбиття, рівним одиниці, і відсутністю шорсткості.

Хоча в геометричній оптиці явища дифракції не враховуються, представляє певний інтерес отримати рішення наших завдань за допомогою принципу дзеркального відображення. Ці рішення будуть граничними (при  $\lambda \rightarrow 0$ ) для строгих рішень. Окрім напрямку відбитого світла ми будемо також визначати і його інтенсивність в різних напрямках.

### **Віддзеркалення від півплощини**

Нехай напівплощина  $x > 0$  є відбиваючим екраном і кут між екраном і напрямком поширення падаючого світла  $\theta_0$  дорівнює  $\varphi_0$  (рис. 1), причому  $\vec{n}_0$  перпендикулярно до краю екрана. Згідно з принципом дзеркального

відображення, кут між екраном і напрямком поширення відбитого світла  $\hat{n}_1$  буде дорівнює  $2\pi - \varphi_0$ . Область обмежена кутами  $\varphi = \varphi_0$  і  $\varphi = 2\pi$ , буде областю тіні; область обмежена кутами  $\varphi = 0$  і  $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ , буде висвітлюватися як падаючим, так і відбитим світлом. Інтенсивність відбитого світла  $\psi_1$  дорівнює інтенсивності падаючого світла  $\psi_0$  і всередині зазначеної області не залежить від координат точки спостереження. Інтенсивність світла в області тіні дорівнює нулю. Діаграма випромінювання світла екраном буде виглядати так, як показано на рис. 2, а в полярних і на рис. 2,б в прямокутних координатах.



Тінь розглядаємо як результат накладення первинного світлового поля на випромінювання екраном вторинне поле, рівне за величиною і протилежне за знаком первинного, а напрямок його поширення  $\hat{n}_2$  збігається в кожній точці з напрямком падаючого світла  $\hat{n}_0$ , який він мав би в цій точці за відсутності екрана. Це дозволить нам надалі провести зіставлення результатів, отриманих в цьому параграфі, з більш точними рішеннями. Зауважимо, що така формальне трактування тіні не вимагає понять поляризації світла і періодичності (фази) світлових хвиль і в цьому сенсі не виходить з рамок геометричної оптики; достатньо прийняти допущення, що інтенсивність світла (скалярна величина)  $\psi$  може бути негативною. Слід також мати на увазі, що в області тіні не можемо в дійсності провести відділення вторинного поля від первинного. Відповідно описаного раніше зображуємо тінь на діаграмах у вигляді пелюстки, відміченого знаком мінус.

Кутова ширина діаграми  $2\alpha$  залежить від величини кута падіння  $\varphi_0$ :

$$2\alpha = 2\varphi_0 \text{ при } \varphi_0 < \pi.,$$

$2\alpha = 2(2\pi - \phi_0)$  при  $\phi_0 > \pi$ ,

при  $\phi_0 = 0$  відображення не відбувається.

### Віддзеркалення від смуги

Розглянемо відображення світла від смуги з паралельними краями

$x = 0$  і  $x = a$ , вважаючи, що напрямок падаючого світла  $\vec{n}_0$  перпендикулярно до краю смуги. Так само як і в попередньому випадку, знаходимо, що якщо падаюче світло поширюється під кутом  $\phi_0$ , то відбитий буде поширюватися під кутом  $2\pi - \phi_0$ , а напрямок тіні  $\vec{n}_2$  збігається з напрямком падаючого світла (рис. 3).

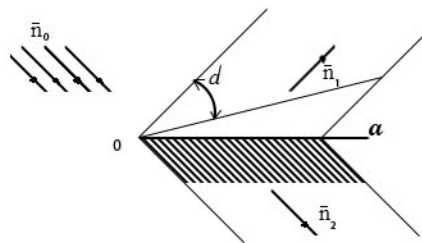


Рис.3 – Віддзеркалення від смуги

Область відбитого світла буде мати межі  $\phi = 2\pi - \phi_0$ ,  $r = \frac{a \sin \phi_0}{\sin(\phi_0 + \phi)}$  і

поверхня відбиває смуги; область тіні матиме кордону  $\phi = \phi_0$ ,  $r = \frac{a \sin \phi_0}{\sin(\phi_0 - \phi)}$  і  
поверхня смуги.

Інтенсивність відбиває світла дорівнює інтенсивності падаючого світла і всередині зазначеної області не залежить від координат точки спостереження; інтенсивність світла в області тіні дорівнює нулю. На відміну від попереднього випадку діаграма випромінювання світла екраном залежить від відстані між початком координат і точкою спостереження. Будемо вважати, що діаграми визначаються для деякого  $r = \text{const}$ . Тоді при  $r < a$  діаграма випромінювання смуги співпадає з діаграмою випромінювання півплощини (рис 1, 2) ; при  $r > a$  діаграма розпадається на дві пелюстки, кутова ширина яких  $\alpha$  буде вузькою при



великих  $r$ , наближатись до нуля при  $r \rightarrow \infty$  (рис. 4). Крім того, ширина діаграми залежить від кута падіння  $\varphi_0$ : при  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = \pi$  і  $\varphi_0 = 2\pi$  - відображення не відбувається, при  $\varphi_0 = \pi/2$  і  $\varphi_0 = (3/2)\pi$  - відбивається максимальну кількість енергії.

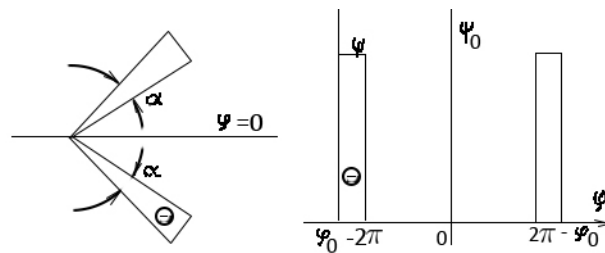


Рис.4 – Діаграма випромінення світла від смуги

### Віддзеркалення від циліндра

Помістимо початок координат на осі нескінченно-довгого циліндру радіуса  $a$ . Вісь  $z$  вважатимемо що збігається з віссю циліндра, а напрям поширення падаючого світла  $\hat{n}_0$  - паралельним осі  $x$ , так що світло приходить з боку  $x > 0$ . Площини  $y = a$  і  $y = -a$  при  $x < 0$  будуть межами області тіні і межами області відбитого світла (рис. 5).

Напрямок тіні  $\hat{n}_2$  збігається з напрямком падаючого світла  $\hat{n}_0$ ; інтенсивність світла в області тіні дорівнює нулю. Напрямок поширення відбитого світла і його інтенсивність залежать від координат точки спостереження  $M$ . Обмежимося випадком, коли відстань від початку координат до точки  $M$  велике в порівнянні з радіусом циліндра.

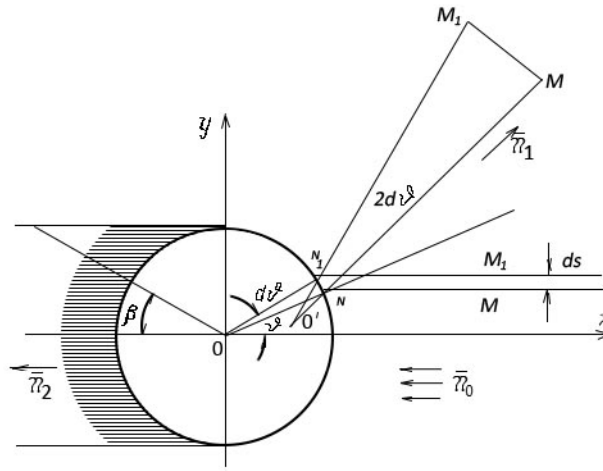


Рис.5. – Віддзеркалення від циліндра

Візьмемо на освітленій стороні циліндра точку  $N$ , нормаль до поверхні в якій становить кут  $\theta$  з віссю  $x$ ; тоді, за принципом дзеркального відображення, світло, відбите в цій точці, буде розповсюджуватись у напрямку  $\hat{n}_1$ , що становить кут  $2\theta$  з віссю  $x$ . Світло падаюче в точку  $N_1$  знаходиться на відстані  $a d\theta$  від точки  $N$ , відбиватиметься під кутом  $2(\theta + d\theta)$ . Відстань по осі  $y$  між променями, що падають в точки  $N$  і  $N_1$ , буде

$$KK_1 = ds = a d\theta \cdot \cos\theta.$$

Відстань між точками  $M$  і  $M_1$  відбитих променів рівне

$$MM_1 = ds_1 = r_1 2 d\theta.$$

Візьмемо дві елементарні площі завдовжки 1 (по осі  $z$ ) і шириною

$$KK_1 = ds = a \cos\theta d\theta \text{ і } MM_1 = ds_1 = 2r_1 d\theta.$$

Оскільки інтенсивність світла пропорційна щільності енергії в світловому потоці, остільки між інтенсивністю відбитого світла  $\psi_M$  і інтенсивністю падаючого світла  $\psi_0$  вийде рівняння

$$\frac{\psi_M}{\psi_0} = \frac{ds}{ds_1}, \dots \psi_M = \psi_0 \frac{ds}{ds_1}.$$

Звідси інтенсивність відбитого світла, що поширюється під кутом  $2\theta$ , буде дорівнює

$$\psi_{2\theta} = \psi_0 \frac{ds}{ds_1} = \psi_0 \frac{a \cos\theta \cdot d\theta}{2r_1 d\theta} = \psi_0 \frac{a}{2r_1} \cos\theta.$$

Так як координата точки відображення  $N$  змінюється в межах

$0 < |\theta| < \pi/2$ , то зручніше ввести кут  $\phi = 2\theta$ , який змінюється в межах  $0 < |\phi| < \pi$ ; зробивши підстановку  $\theta = \phi/2$ , отримаємо шукану формулу

$$\Psi_{\phi} = \Psi_0 \frac{a}{2r_1} \cos \frac{\phi}{2}.$$

Величини  $r_1$  і  $\phi$  при  $r_1 \gg a$  можна вважати полярними координатами точки спостереження  $M$ .

На рис. 6 показана діаграма інтенсивності світла, відбитого циліндром. Ширина тіньової пелюстки буде (рис.6)  $2\beta \approx 2a/r$ .

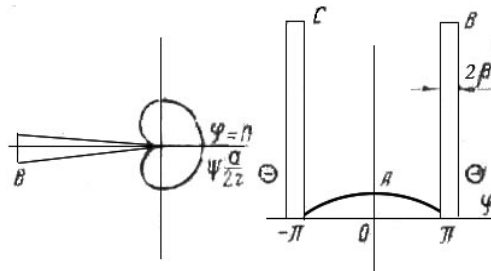


Рис. 6 – Діаграма інтегрованість світла, відбитого циліндром

Якщо прийmemo на діаграмі за одиницю масштабу  $\Psi_{\phi=0} = \Psi_0 \frac{a}{2r}$ , то при  $z \rightarrow \infty$  точка В буде йти в нескінченність, а кутова ширина тіньового пелюстки  $2\beta$  наближатиметься до нуля.

## Віддзеркалення від довільного опуклого тіла в напрямку на джерело світла

Наведемо формулу для інтенсивності світла, відбитого від довільної, усюди опуклою, дзеркальної поверхні

$$\Psi_{\phi, \theta} = \Psi_0 \frac{R_1 R_2}{4r^2}.$$

Тут:  $\Psi_0$  - інтенсивність падаючого світла,

$z$  - відстань від початку координат до точки спостереження, що значно перевершує розміри відображає тіла,

$R_1$  і  $R_2$ , - головні радіуси кривизни поверхні, що відбиває в точці відображення  $N$  (передбачається, що  $R_1$  і  $R_2$  усюди більше нуля і багато менше відстані до точки спостереження).

У разі циліндричної поверхні, коли один з радіусів кривизни нескінченний, формула змінюється

$$\Psi_{\phi} = \Psi_0 \frac{R}{2r} \cos \gamma.$$

Тут  $\gamma$  - кут між напрямком падаючого світла і нормалю до поверхні в точці відображення  $N$ , а радіус кривизни  $R \ll r$ .

## 2.2.Метод хвильової оптики

Відмінною особливістю геометричної оптики являється уявлення про локальному характері явищ (віддзеркалення, заломлення), що мають місце при поширенні світла, т. е. уявлення потоку світла у вигляді сукупності як завгодно тонких пучків променів, що поширюються незалежно один від одного. Ця локальність проявляється, наприклад, у формулах для інтенсивності відбитого світла, яка виходить залежною від кривизни поверхні, що відбиває в точці відображення, але не від форми поверхні в цілому.

Як показує досвід і точна теорія, розрахунки геометричної оптики не виправдовуються в тих випадках, коли радіуси кривизни відбиває або заломлюючої поверхні порівнянні з довжиною хвилі світла; а також у тих випадках, коли точка спостереження знаходиться поблизу геометричного кордону пучка променів світлових (межі тіні, кордони пучка відбитих променів, каустичні поверхні). У цих випадках доводиться звертатись до більш точних розрахунками хвильової оптики.

Хвильова оптика розглядає світ як хвильовий процес, швидкість поширення якого залежить від властивостей середовища і характеризується інтенсивністю світла  $\psi^2 = f(x, y, z, t)$  і частотой. Так наприклад, світлове поле від точкового монохроматичні джерела в однорідному ізотропному середовищі описується функцією:

$$\psi = \frac{A}{r} \exp \left( -i\omega \left( t - \frac{r}{c_1} \right) \right) = A \exp(-i\omega \cdot t) \frac{1}{r} \exp(ikr).$$

де:

$A$  - амплітудний множник,

$\omega$  - кругова частота,

$c_1$  - швидкість світла в даному середовищі,

$r$  - відстань від джерела до точки спостереження,

$k$  - хвильовий коефіцієнт,

$$k = \omega/c_1 = 2\pi/\lambda$$

$\lambda$  - довжина хвилі світла.

### Принцип Гюйгенса-Френеля. Формула Кірхгофа

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля кожна точка, в якій має місце світлове збудження, може розглядатися як джерело вторинної світлової хвилі. Накладення вторинних хвиль дає в результаті спостережувану інтенсивність світла (рис. 7). Для отримання правильного результату слід враховувати фазу вторинних хвиль, що приходять в точку спостереження, і крім того, амплітуду, яку слід покласти залежною від кута між хвильовою нормаллю первинної хвилі і напрямком на точку спостереження.

Порядок проведених обчислень  $\psi$  за принципом Гюйгенса-Френеля можна показати, наприклад, на разі дифракції від півплощини. Нехай світло поширюється вздовж осі  $y$ , а екран АВ (рис.8) збігається з напівплощиною  $x > 0$ .

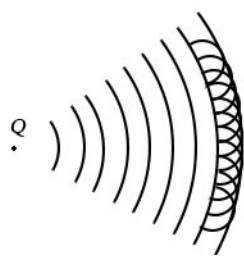


Рис.7 – Накладання  
вторинних хвиль

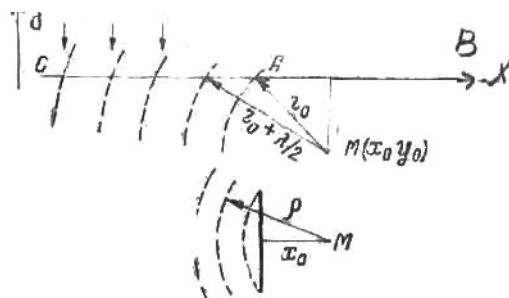


Рис.8 – Дифракція від  
півплощини

Опишемо з точки спостереження  $M(x_0, y_0)$  сфери радіусами

$$AM = r_0, r_0 + \lambda/2, r_0 + 2\lambda/2 \dots$$

Ці сфери розіб'ють хвильову поверхню СА на кільцеві зони, звані зонами Френеля (рис. 8). Елемент поверхні  $ds_n$   $n$ -Ой зони  $ds_n = \rho d\rho d\varphi$ ; де  $\rho^2 = r^2 - y_0^2$ , випромінює сферичну хвилю, значення якої в точці М

$$d\psi_n = K_n ds_n \frac{1}{r} \exp - i\omega \left( t - \frac{r}{c} \right).$$

Функція  $K_n$  враховує залежність амплітуди вторинної хвилі від напрямку і в межах зони може вважатися постійною. Дія всієї  $n$ -Ой зони знайдемо через інтеграл

$$\psi_n = K_n e^{-i\omega \cdot t} \int_{S_0} \frac{e^{ikr}}{r} ds_n.$$

Для дії всіх зон в точці М знайдемо

$$\psi = 2 \cdot i\lambda e^{-i\omega \cdot t} \frac{e^{+ikr_0}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K_n (-1)^n \arccos \frac{x_0}{\sqrt{(r_0 + n \frac{\lambda}{2})^2 - y_0^2}}.$$

У випадку, коли точка М знаходиться на межі геометричної тіні ( $x_0=0$ )

$$\psi_n = K_n i\lambda (-1)^n e^{-i\omega \cdot t} e^{ikr_0}.$$

Можна показати, що необхідно покласти  $K_1 = i/\lambda$ , при цьому

$$\psi = \frac{1}{2} e^{-i\omega \cdot t} e^{ikr_0}.$$

Отже, інтенсивність світла на межі геометричної тіні

$$|\psi|^2 = \frac{|\psi_0|^2}{4}.$$

При видаленні точки М від межі геометричної тіні в область тіні  $\psi$  поступово спадає, при видаленні в освітлену область  $\psi \rightarrow \psi_0$ .

Таким чином з принципу Гюйгенса-Френеля випливає, що тіні принципово не існує; в області геометричної тіні завжди є більш-менш слабке світлове збудження.

Френелем і його послідовниками були вирішені подібним чином багато завдань дифракції, хоча і не досить коректно, оскільки при такому рішенні необхідно задаватися видом функції напрямку  $K$ .

Суворе математичне формулювання принципу Гюйгенса-Френеля Дана Кірхгофом в 1882 р. Формула Кірхгофа в загальному випадку має вигляд

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \left[ \Psi \right] \frac{\partial}{\partial n} - \frac{1}{cr} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] \right\} \partial s.$$

Вона дає значення функції  $\Psi$  всередині області, обмеженої замкнутою поверхнею  $s$ , через значення функції  $\Psi$  і її нормальною похідною на поверхні  $s$  (рис. 9).

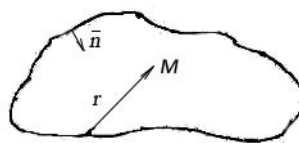


Рис.9 – Область визначення функції  $\Psi$ .

Квадратні дужки означають, що в укладені в них вирази слід вносити не витривезначення часу  $t$ , а „затриманий“ час  $(t - r/c)$ .

Формула є точним інтегралом хвильового рівняння:

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

яке повинна задовільняти функція  $\Psi$ , яка описує хвильовий процес розповсюдження світла. Формула Кірхгофа отримується у припущенні, що функція  $\Psi$ , а також її перші та другі похідні по координатам однозначні та неперервні в середині області інтегрування; це означає,

що всі наявні джерела і поверхні розриву (екрани) повинні знаходитись поза поверхнею  $s$ .

У разі гармонійної залежності  $\Psi$  від часу формула Кірхгофа набуває більш простий вигляд. Виражаючи залежність від часу функцією  $e^{i\omega t}$ , знайдемо спочатку:

$$\Psi = \exp(-i\omega \cdot t) \Psi_1(x, y, z),$$

$$|\Psi| = \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \Psi_1(x, y, z) = \exp(-i\omega \cdot t) \exp(ikr) \Psi_1(x, y, z) = \exp(ikr) \Psi,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \exp(-i\omega \cdot t) \Psi_1(x, y, z) = -i\omega \Psi,$$

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right] = -i\omega \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \Psi_1(x, y, z),$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \exp(-i\omega \cdot t) \frac{\partial}{\partial n} \Psi_1(x, y, z),$$

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right] = \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \frac{\partial}{\partial n} \Psi_1(x, y, z) = \exp(ikr) \frac{\partial \Psi}{\partial n}.$$

Підставивши знайдені значення в формулу Кірхгофа, отримаємо

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \exp(ikr) \Psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{ik}{r} \exp(ikr) \Psi \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r} \exp(ikr) \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right\} ds$$

або

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \Psi \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r} \exp(ikr) \right] - \frac{1}{r} \exp(ikr) \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right\} ds.$$

Приведена формула частіше виводиться за допомогою теореми Гріна, не звертаючись до формули Кірхгофа. Зважаючи поширеності цього прийому також і в інших областях математичної фізики ми вважаємо корисним привести тут і цей висновок.

Нехай функції  $\psi(x, y, z, t)$  та  $\phi(x, y, z, t)$  разом зі своїми першими і другими похідними однозначні і неперервні усередині деякої просторової області  $V$ , включаючи границю; тоді за відомою теоремою Гріна

$$\int_V (\phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \phi) dV = \int_S \left( \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds,$$

де перший інтеграл взятий по об'єму  $V$ , другий — по його границі, а  $n$  — означає внутрішню нормаль до поверхні  $S$ .

Якщо  $\psi$  і  $\phi$  — гармонійні функції часу і задовольняють хвильові рівняння

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

то  $\phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \phi = 0$ , інтеграл по об'єму зникає і



$$\int_S \left( \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds = 0.$$

Будемо вважати, що  $\psi$  — шукана нами функція, а на поки невизначену функцію  $\phi$  накладемо додатково ще одну умову: точка  $M$  повинна бути для функції  $\phi$  особливою точкою.

Найпростішою функцією  $\phi$ , що задовольняє хвильові рівняння і останню умову, є функція

$$\phi = \exp(-i\omega \cdot t) \frac{\exp(ikr)}{r}$$

( $r$  — відстань від точки інтегрування до точки  $M$ ), на котрійі зупинемось. Оскільки тепер умови безперервності функцій в точці  $M$  порушені, виріжемо в середині деякої області, яка нас цікавить  $V$  невелику сферу  $\Sigma$  з центром в точці  $M$  (рис. 10).

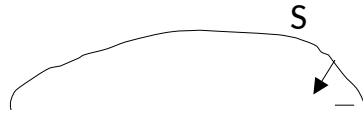


Рис.10 Сфера  $\Sigma$  з центром в точці  $M$

Тепер область  $V$  обмежена двома поверхнями  $S$  і  $\Sigma$  і замість інтеграла по поверхні повинні написати

$$\int_S \left( \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds + \int_{\Sigma} \left( \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\Sigma = 0$$

На поверхні сфери, радіус якої  $R \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial R}; \quad \phi = \exp(-i\omega \cdot t) \frac{\exp(ikR)}{R} \rightarrow \exp(-i\omega \cdot t) \frac{1}{R};$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi}{\partial R} = -\exp(-i\omega \cdot t) \exp(ikR) \left( \frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \rightarrow \frac{\exp(-i\omega \cdot t)}{R^2};$$

$$\Psi \rightarrow \psi_M,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad \text{— кінцево; } d\Sigma = R^2 d\Omega \quad (\Omega \text{ — тілесний кут з вершиною в точці } M).$$

Відповідно,

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Xi} \left( \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\Xi = \\ & = \lim_{R \rightarrow 0} \left\{ (\Psi)_{cp} \int_{\Xi} \frac{\exp(-i\omega \cdot t)}{R^2} R^2 d\Omega + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)_{cp} \int_{\Xi} \frac{\exp(-i\omega \cdot t)}{R} R^2 d\Omega \right\} = \Psi_M \exp(-i\omega \cdot t) \cdot 4\pi; \\ & \int_s \left( \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS - \Psi \cdot 4\pi \exp(-i\omega \cdot t) = 0; \\ & \int_s \left\{ \Psi \frac{\partial}{\partial n} \left[ \exp(-i\omega \cdot t) \frac{\exp(ikr)}{r} \right] - \exp(-i\omega \cdot t) \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right\} dS = -4\pi \cdot \Psi \exp(-i\omega \cdot t). \end{aligned}$$

Помноживши останнє рівняння на  $\frac{\exp(i\omega \cdot t)}{4\pi}$  отримуємо формулу Кіргофа.

Як вже зазначалося вище, всередині області, обмеженої поверхнею  $s$ , не повинно бути джерел і поверхонь розриву; в решті вибір  $s$  довільний. Зокрема, частина поверхні  $s$  може уходити в нескінченність, при цьому впливом віддаленої частини можна буде знехтувати. Коли розглядають дифракційні явища в отворі екрану, то за поверхню інтегрування вибирають таку поверхню, частина якої примикає до тіньової сторони екрану і покриває дифрагуючі отвори, а інша частина відноситься в нескінченність (рис. 11).

Рис.11 Дифракційні явища в отворі екрану

Для того, щоб провести обчислення за формулою Кірхгофа, потрібно

знати величини  $\psi$  і  $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$  на поверхні інтегрування, а так як їх точні значення невідомі, то доводиться обмежитися наближеними значеннями.

В якості наближених значень беруться значення  $\psi$  і  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  на поверхні інтегрування при вільному поширенні світла — в освітленій частині  $s$  (покриваючій отвір), і  $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  в області геометричної тіні і на нескінченно-віддаленій частині  $s$ . Таким чином, хоча формула Кірхгофа і є строгим рішенням хвильового рівняння, за допомогою неї можна отримати тільки наближені рішення. Взагалі кажучи, чим коротше довжина хвилі  $\lambda$ , тим точніше будуть знайдені значення  $\psi$ . При вирішенні дифракційних задач в області оптики одержуване наближення є цілком достатнім для практичних цілей, тому формула Кірхгофа широко застосовується в оптиці і в даний час.

Теорія дифракції Кірхгофа застосовується і в області більш довгих хвиль — сантиметрових і дециметрових. Вирішення таких завдань, наприклад, як обчислення діаграм спрямованості рупорної антени, проводиться звичайно з її допомогою.

У теорії лінійних диференціальних рівнянь доводиться (рівняння  $\Delta u + k^2 u = 0$ ), що коли регулярна функція, яка є рішенням диференціального рівняння, разом зі своєю похідною на якій-небудь ділянці дорівнює нулю, то вона дорівнює нулю скрізь.

Тому описаний вище спосіб відшукування рішення, коли покладається  $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$  на тіньовій стороні екрану, з погляду математичної строгості не витримує критики. Зоммерфельд усуває це протиріччя тим, що замість хвильової функції бере відповідну функцію Гріна  $G$ , яка на поверхні  $s$  обертається в нуль. Тоді формула Кірхгофа приймає вигляд

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int_s \psi \frac{\partial G}{\partial n} dS.$$

При цьому необхідність у вживанні наближених значень  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$  відпадає, і вказане протиріччя усувається. Зокрема, якщо екран є площиною, то береться функція Гріна

$$G = \frac{\exp(ikr)}{r} - \frac{\exp(ikr_1)}{r_1}.$$

Тут:

$r_1$  — відстань від точки інтегрування до точки  $M_1$  — дзеркальної відносно  $M$ .

Функція Гріна має особливу точку при  $r = 0$ , яка збігається з особливою точкою хвильової функції, і другу особливу точку при  $r_1 = 0$  поза області інтегрування; в площині екрану  $r_1 = r$ ,  $G = 0$ .

Підставляючи вираз для функції Гріна в вираз для  $\psi$  і беручи

$$1 - \frac{1}{ikr} \approx 1,$$

що справедливо при  $r \gg \lambda$ , отримаємо

$$\psi = -\frac{ik}{2\pi} \int_S \psi \frac{\exp(ikr)}{r} \cos(n, r) dS.$$

Ця формула виражає не що інше, як принцип Гюйгенса: від кожного елемента поверхні  $ds$  поширюється сферична хвиля  $\frac{\exp(ikr)}{r}$ , амплітуда і фаза якої задаються функцією  $\psi$ , а  $\cos(n, r)$  є функцією напрямку.

В заключення цього розділу зауважимо, що формула Кірхгофа в деяких окремих випадках може бути дещо спрощена. Напишемо спочатку формулу Кірхгофа у вигляді

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int_S \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = -I_1 + I_2.$$

Введемо криволінійні координати  $\xi, \eta, \zeta$ , таким чином, щоб одна поверхня  $\xi = \xi_1 = \text{const}$  збіглася з поверхнею екрану  $E$ , а напрямок нормалі був дотичним до координатної лінії  $\xi$  (рис.12).

Рис.12 Криволінійні координати для екрана

Тоді на поверхні екрана  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ , а величини  $\Psi$  і  $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$  будуть функціями тільки координат  $\eta$  і  $\zeta$ . При цьому інтеграли  $I_1$  і  $I_2$  можна записати так

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_S \Psi_{\xi=\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) dS; \dots I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_S \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1} \frac{\exp(ikr)}{r} dS$$

В тих виключних випадках, коли виконується співвідношення

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_1} = C \cdot \Psi_{\xi=\xi_1},$$

де  $C$  – не залежить від координат  $\eta$ ,  $\zeta$ , отримаємо

$$I_2 = \frac{C}{4\pi} \int_S \Psi_{\xi=\xi_1} \frac{\exp(ikr)}{r} dS, \dots \frac{\partial I_2}{\partial \xi} = \frac{C}{4\pi} \int_S \Psi_{\xi=\xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\exp(ikr)}{r} \right) dS = C \cdot I_1;$$

$$I_1 = \frac{1}{C} \frac{\partial I_2}{\partial \xi}; \dots \Psi = -\frac{1}{C} \frac{\partial I_2}{\partial \xi} + I_2 = \left( -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial \xi} + 1 \right) I_2 = \left( 1 - \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{C}{4\pi} \int_S \Psi_{\xi=\xi_1} \frac{\exp(ikr)}{r} dS.$$

Таким чином, формула Кірхгофа приймає вигляд

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \left( C - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \int_S \Psi_{\xi=\xi_1} \frac{\exp(ikr)}{r} dS.$$

## Дифракція від щілини

Нехай необмежений нескінченно-тонкий, ідеально відображаючий екран збігається з площиною  $x = 0$  і в екрані має щілину, обмежену лініями  $y = -a$ ,  $y = b$ . Розглянемо випадок, коли напрям поширення хвилі, що приходить, паралельно площині  $xy$  становить кут  $\alpha$  з віссю  $x$  (рис. 13).

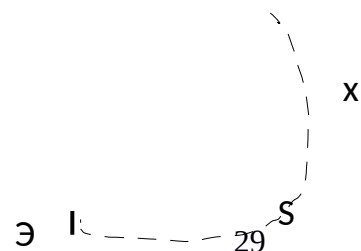


Рис.13 Дифракція від щілини

При цих умовах падаючу хвилю можна представити рівнянням

$$\Psi_0 = \exp(-i\omega \cdot t) \exp[ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)].$$

Позначимо координати точки спостереження М через  $x, y, z$  і координати довільної точки в площині екрану через  $\xi, \eta, \zeta$ . Відповідно до сказаного в попередньому розділі, будемо знаходити інтеграл

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \Psi \frac{dG}{dn} dS = -\frac{\exp(i\omega \cdot t)}{2\pi} \int_{-a}^b d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik\eta \sin \alpha) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\exp[ikr]}{r} \right) d\zeta = \\ &= -\frac{\exp(i\omega \cdot t)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^b d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik\eta \sin \alpha) \frac{\exp(ikr)}{r} d\zeta. \end{aligned}$$

Відмітимо, що тут не використовується умова

$$kr \gg 1.$$

Так

$$\text{як } r = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2}, \text{ то}$$

зважаючи на парність підінтегральної функції відносно  $\zeta$ , опускаючи множник  $\exp(-i\omega t)$ , можна написати

$$\Psi = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^b d\eta \exp(ik\eta \sin \alpha) \int_0^{\infty} \frac{\exp(ikr)}{r} d\zeta.$$

Позначивши  $\rho^2 = x^2 + (y - \eta)^2$  і помічаючи, що

$$dr = \frac{\xi \cdot d\xi}{r}, \dots \dots \dots d\xi = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}},$$

Приведемо інтеграл до вигляду

$$\Psi = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^b d\eta \exp(ik\eta \sin \alpha) \int_{\rho}^{\infty} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr.$$

Внутрішній інтеграл виражається через функцію Ханкеля (додаток)

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr = \int_1^{\infty} \frac{\exp(ik\rho\tau)}{\sqrt{\tau^2 - 1}} d\tau = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}\right).$$

Таким чином приходимо до формули

$$\Psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^b \exp(ik\eta \sin \alpha) H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta.$$

Ця формула буде слугувати вихідною для ряду інших формул.

Розглянемо випадок, коли відстань від точки спостереження до щілини велика в порівнянні з шириною щілини і  $a = b$ . Позначимо:

$$x^2 + y^2 = R^2 \gg a, \cos \phi = x/R, \quad \sin \phi = y/R.$$

При цьому

$$\rho^2 = x^2 + (y - \eta)^2 = R^2 - 2y\eta + \eta^2,$$

$$\rho = R \sqrt{1 - 2 \sin \phi \frac{\eta}{R} + \left(\frac{\eta}{R}\right)^2} = R \left(1 - \frac{\eta}{R} \sin \phi + \frac{\eta^2}{2R^2} \cos^2 \phi + \dots\right)$$

Вважаючи  $k\rho \gg 1$  і замінюючи функцію Ханкеля її асимптотичним виразом, отримаємо з наведеної формули з достатнім приближенням

$$\Psi = \frac{i}{2} \int_{-a}^a \exp(ik\eta \sin \alpha) \frac{kx H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2})}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} d\eta = \frac{ikx}{2} \int_{-a}^a \frac{\exp(ik\eta \sin \alpha)}{\rho} H_1^{(1)}(k\rho) d\eta =$$

$$\begin{aligned} & i \frac{ikx}{2} \int_{-a}^a \frac{\exp(ik\eta \sin \alpha)}{\rho} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot k\rho}} \exp\left(i\left(k\rho - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) d\eta \approx \frac{kx}{2R} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot k\rho}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \int_{-a}^a \exp(ik\eta \sin \alpha) \exp(ik\rho) d\eta \\ & = \frac{k \cos \phi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot kR}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \exp(ikR) \int_{-a}^a \exp(ik\eta \sin \alpha) \exp\left(ik\left(-\eta \sin \phi + \frac{\eta^2}{2R} \cos^2 \phi\right)\right) d\eta = \\ & = \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \frac{k \cos \phi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot kR}} \exp(ikR) \int_{-a}^a \left[\exp ik\eta (\sin \alpha - \sin \phi) + ik \frac{\eta^2}{2R} \cos^2 \phi\right] \cdot d\eta. \end{aligned}$$

Останній інтеграл зводиться до інтегралів Френеля:

$$C_1(u) = C\left(\frac{\pi \cdot u^2}{2}\right) = \int_0^u \cos \frac{\pi \cdot t^2}{2} dt; \dots \dots \dots S_1(u) = S\left(\frac{\pi \cdot u^2}{2}\right) = \int_0^u \sin \frac{\pi \cdot t^2}{2} dt;$$

$$F_1(u) = C_1(u) + iS_1(u).$$

Якщо знехтувати останнім доданком в показнику підінтегральної функції, тобто якщо взяти  $\rho = R - \eta \sin \phi$ , то вийде проста формула:

$$\begin{aligned} \Psi &= \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) \frac{k \cos \phi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(ikR)}{\sqrt{kR}} \int_{-a}^a \exp ik\eta (\sin \alpha - \sin \phi) d\eta = \\ &= \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(ikR)}{\sqrt{kR}} \frac{\sin[ka(\sin \alpha - \sin \phi)]}{\sin \alpha - \sin \phi} \cos \phi. \end{aligned}$$

При нормальному падінні хвилі на площину щілини  $\sin \alpha = 0$  і

$$\Psi = \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\exp(ikR)}{\sqrt{kR}} \cdot \frac{\sin[ka \sin \phi]}{\sin \phi} \cos \phi.$$

Відзначимо характерні множники в цій формулі: множник  $\exp(ikR)/\sqrt{kR}$ , який визначає залежність від відстані, показує, що хвиля, що розповсюджується від щілини, є циліндричною; другий множник  $\sin(ka \sin \phi)/\sin \phi$  характерний для лінійного ланцюжка синфазних випромінювачів рівної амплітуди, рівновіддалених один від одного.

Коли прийняли  $\rho = R - \eta \sin \phi$ , то це означає, що прийняли паралельність променів, що йдуть від різних точок щілини  $(0, 0, \eta)$  до точки спостереження, що справедливо при  $a/R \rightarrow 0$ . Асимптотичне вираження враховує непаралельність променів і виникає внаслідок цього різниця фаз

$\frac{k\eta^2}{2R} \cos^2 \phi$ . Доповнюючи вираз в показнику до повного квадрата, з цієї ж формули отримаємо

$$\Psi = \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) \frac{k \cos \phi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\exp(ikR)}{\sqrt{kR}} \cdot \exp \frac{ikR}{2} \left( \frac{\sin \alpha - \sin \phi}{\cos \phi} \right)^2 \int_{-a}^a \exp \frac{ikR}{2} \left( \frac{\sin \alpha - \sin \phi}{\cos \phi} + \frac{\eta \cos \phi}{R} \right)^2 d\eta.$$

Позначимо для стислості

$$A = \frac{\sin \alpha - \sin \phi}{\cos \phi}; \dots \dots \dots B = \frac{\cos \phi}{R}$$

І зробимо підстановку:

$$\frac{kR}{2} (A + B\eta)^2 = \frac{\pi}{2} t^2; \dots \dots \dots \sqrt{kR} B d\eta = \sqrt{\pi} dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Psi &= \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) \frac{k \cos \phi}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\exp(ikR)}{\sqrt{kR}} \exp\left(\frac{ikR}{2} A^2\right) \frac{1}{B} \sqrt{\frac{\pi}{kR}} \int_{\sqrt{\frac{kR}{\pi}}(A-Ba)}^{\sqrt{\frac{kR}{\pi}}(A+Ba)} \exp \frac{i\pi \cdot t^2}{2} dt = \\ &= \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2}} \exp ikR \left(1 - \frac{A^2}{2}\right) \left[ F_1 \left[ \sqrt{\frac{kR}{\pi}} (A+Ba) \right] - F_1 \left[ \sqrt{\frac{kR}{\pi}} (A-Ba) \right] \right]. \end{aligned}$$

Отримана формула придатна для будь-яких  $\phi = \arctg y/x$  за умов  $kR \gg 1$  і  $R \gg a$ . Множник  $(1 - A^2/2)$  в показнику вийшов внаслідок того, що утримали в показнику підінтегральною функції формули тільки другу ступінь  $\eta$ .



Утримуючи третій ступінь  $\eta$ , можна було б навести інтеграл до інтеграла Ейрі, що виражається через циліндрові функції з індексом  $n = \pm 1/3$ , при цьому замість  $(1 - A^2/2)$  вийде більш складний вираз.

У курсах оптики, зазвичай, водяться формули, більш прості, але вони придатні тільки при малих  $\phi$ .

### Дифракція від півплощини

Припустимо, що границями щілини є  $y = a = 0$  і  $y = b$ , тоді замість формули для щілини напишемо

$$\Psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^b \exp(ik\eta \sin \alpha) H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) \cdot d\eta.$$

Збільшуючи  $b$  необмежено, прийдемо до випадку дифракції від напівплощини

$$\Psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \exp(ik\eta \sin \alpha) H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) \cdot d\eta.$$

Зокрема при нормальному падінні хвилі на екран  $\alpha = 0$ , і

$$\Psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) \cdot d\eta = -\frac{i}{2} \int_{-y}^\infty H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + \tau^2}) \cdot d\tau,$$

$$\eta - y = \tau.$$

Розглянемо цей випадок докладніше.

Спробуємо висловити отриманий інтеграл через відомі функції.

Обчислимо інтеграл

$$I_1 = \int_0^\infty H_0^{(1)}(k_1\sqrt{x^2 + v^2}) dv$$

За допомогою відомої формули

$$H_0^{(1)}(k, \rho) = \frac{2}{i\pi} \int_1^\infty \frac{\exp(ik_1\rho\beta)}{\sqrt{\beta^2 - 1}} d\beta = \frac{2}{i\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(ik_1\sqrt{u^2 + \rho^2})}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} du.$$

$$I_1 = \frac{2}{i\pi} \int_0^\infty dv \int_0^\infty \frac{\exp(ik_1\sqrt{u^2 + (x^2 + v^2)})}{\sqrt{u^2 + (x^2 + v^2)}} du = \frac{2}{i\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\exp(ik_1\sqrt{u^2 + v^2 + x^2})}{\sqrt{u^2 + v^2 + x^2}} du dv.$$

Отриманий подвійний інтеграл обчислимо в полярних координатах, для чого замінімо змінні  $u$  і  $v$  на  $R$  і  $\varphi$  за формулами  $u = R \cos \varphi$ ,  $v = R \sin \varphi$ ,

$$dudv = R dR d\varphi$$

$$I_1 = \frac{2}{i\pi} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{\exp(ik_1 \sqrt{R_1^2 + x^2})}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} R_1 \cdot dR_1 \cdot d\varphi$$

Останній інтеграл буде абсолютно збіжним, якщо хвильове число  $k_1$  має додатню уявну частину:  $k_1 = k + ik_2$ ,  $ik_2 > 0$ , що відповідає поширенню в поглинаючому середовищі. Так як в інтегралі  $I_1$  змінні розділилися, то отримуємо просто:

$$I_1 = \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{\exp i(k + ik_2) \sqrt{R_1^2 + x^2}}{\sqrt{R_1^2 + x^2}} R_1 \cdot dR_1 = \frac{\exp[(ik - k_2) \sqrt{R_1^2 + x^2}]}{ik - k_2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{i} \cdot \frac{\exp(ik - k_2)x}{ik - k_2}.$$

У межі при  $k_2 \rightarrow 0$ ,  $k_1 \rightarrow k$ , отримаємо  $I_1 = \exp(ikx)/k$ .

Таким чином

$$\int_0^\infty H_0^{(1)}(k \sqrt{x^2 + v^2}) dv = \frac{\exp(ikx)}{k}.$$

Диференціюючи останню рівність по параметру  $x$ , знайдемо

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty H_0^{(1)}(k \sqrt{x^2 + v^2}) dv = - \int_0^\infty \frac{kx}{\sqrt{x^2 + v^2}} H_0^{(1)}(k \sqrt{x^2 + v^2}) dv = i \exp(ikx).$$

Коли точка спостереження знаходиться на кордоні геометричної тіні,  $y = 0$  і вище наведені формули дають

$$\Psi = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty H_0^{(1)}(k \sqrt{x^2 + \tau^2}) d\tau = \frac{\exp(ikx)}{2}.,$$

Тобто незалежно від відстані до екрану,  $\Psi$  на межі геометричної тіні внаслідок впливу екрану зменшується в два рази.

Формулу для нормального падіння хвилі на екран можна переписати таким чином

$$\Psi = \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-y}^\infty H_0^{(1)}(k \sqrt{x^2 + \tau^2}) \cdot d\tau - \int_0^\infty H_0^{(1)}(k \sqrt{x^2 + \tau^2}) d\tau \right\} =$$

$$= \frac{\exp(ikx)}{2} + \frac{1}{2i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2+\tau^2}) d\tau$$

або

$$\Psi = \frac{\exp(ikx)}{2} + \frac{ikx}{2} \int_0^y \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{x^2+\tau^2})}{\sqrt{x^2+\tau^2}} d\tau = \frac{\exp(ikx)}{2} + \frac{ikx}{2} \int^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{H_1^{(1)}(k\rho)}{\sqrt{\rho^2-x^2}} d\rho.$$

При  $k\rho \gg 1$  останній інтеграл можна перетворити, використовуючи асимптотичний розклад функції Ханкеля

$$\frac{ikx}{2} \int_x^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{d\rho}{|\rho^2-x^2|} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot k\rho}} \exp i(k\rho - \frac{3\pi}{4}) = \frac{kx \exp(-i\frac{\pi}{4})}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot k}} \cdot \int_x^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\exp(ik\rho) d\rho}{\sqrt{\rho} \sqrt{(\rho+x)(\rho-x)}} = I.$$

Якщо  $x \ll \rho$ , можна прийняти  $\rho \approx x$ ; тоді

$$I \approx \frac{\exp(i\frac{\pi}{4})}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot \int_x^{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\exp(ik\rho) d\rho}{\sqrt{\rho-x}} = \frac{\exp(i\frac{\pi}{4})}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot \exp(ikx) \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}-x} \frac{\exp(ik\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau.$$

$$\Psi = \frac{\exp(ikx)}{2} \left\{ 1 + \exp(-i\frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}-x} \frac{\exp(ik\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\}$$

Якщо визначити точку спостереження полярними координатами  $R$  і  $\phi$ , то

$$\Psi = \frac{\exp(ikR \cos \phi)}{2} \left\{ 1 + \exp(-i\frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot \int_0^{R-R \cos \phi} \frac{\exp(ik\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\}.$$

Зробимо підстановку  $k\tau = (\pi t^2)/2$ ;  $d\tau = (\pi/k)t dt$ , тоді попередній вираз буде мати вигляд

$$\Psi = \frac{\exp(ikR \cos \phi)}{2} \left\{ 1 + \exp(-i\frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{k}{\pi}} \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{2k}{\pi}} \sqrt{R(1-\cos \phi)}} \exp(i\frac{\pi}{2} t^2) \sqrt{\frac{2\pi}{k}} dt \right\} =$$

$$i \frac{\exp(ikR \cos \phi)}{2} \left\{ 1 + \sqrt{2} \exp(-i\frac{\pi}{4}) \int_0^{2\sqrt{\frac{kR}{\pi}} \sin \frac{\phi}{2}} \exp(i\frac{\pi}{2} t^2) dt \right\}$$

Кінцева формула

$$\Psi = \frac{\exp(ikR \cos \phi)}{2} \left\{ 1 + \sqrt{2} \exp(-i\frac{\pi}{4}) F_1 \left( 2\sqrt{\frac{kR}{\pi}} \sin \frac{\phi}{2} \right) \right\}.$$

Ця формула збігається з формулою, отриманою по строгої теорії.

Повернемося тепер до формули дифракції від півплощини. Її аналіз більш складний, зважаючи на наявність множника  $\exp(ik\eta \sin \alpha)$ . Тому поступимо таким чином: повернемо  $S$  – поверхню інтегрування (напівплощина  $y > 0$ ) на кут  $\alpha$ , щоб вона стала перпендикулярно до напрямку поширення світла (рис. 14).



Рис.14 Поворот поверхні інтегрування на кут  $\alpha$

Вводячи нові координати

$$x' = R \cos \phi = R \cos(\phi - \alpha),$$

$$y' = R \sin \phi = R \sin(\phi - \alpha),$$

Замість формули дифракції від півплощини напишемо

$$\Psi = \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-y'}^{\infty} H_0^{(1)}(k \sqrt{x'^2 + \tau^2}) d\tau,$$

Звідки аналогічним чином отримуємо остаточну формулу

$$\Psi = \frac{\exp[ikR \cos(\phi - \alpha)]}{2} \left\{ 1 + \sqrt{2} \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) F_1\left(2\sqrt{\frac{kR}{\pi}} \sin \frac{\phi - \alpha}{2}\right) \right\}$$

При безпосередньому аналізі формули дифракції від півплощини потрібно було б вирахувати ряд нових, більш складних інтегралів, наприклад

$$\int_{-x \tan \alpha}^{\infty} \exp(ikv \sin \alpha) H_0^{(1)}(k \sqrt{x^2 + v^2}) dv = \frac{\exp(ikx \cos \alpha)}{k \cos \alpha}.$$

Поворот площини  $S$  дозволяє уникнути цих обчислень.

### Дифракція від полоси

Нехай екраном є нескінченно довга полоса, що ідеально відбиває, і нескінченно тонка, обмежена лініями  $y = -a$  і  $y = b$ . На екран падає хвиля. Для того, щоб обчислити  $\psi$  у точці  $M(x, y, 0)$ , обираємо поверхню інтегрування  $s$  так

само, як у випадку дифракції від щілини (рис. 15). на підставі висновків, проведених у попередніх розділах, напишемо одразу (відразу опускаючи множник  $e^{-i\omega t}$ ).

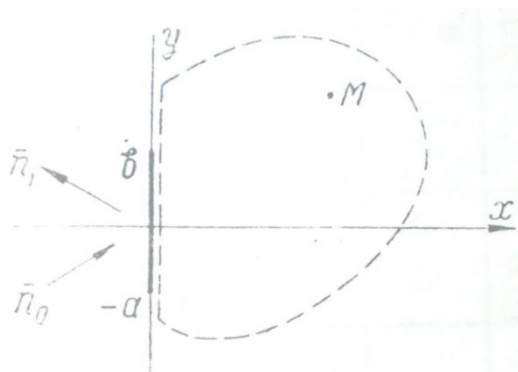


Рис. 15. Дифракція від полоси

$$\psi = \frac{-i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-\infty}^{-a} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta + \int_b^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta \right\} = \frac{-i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta$$

Перший інтеграл можна обчислити, використавши прийом, що був використаний для обчислення інтеграла (2.1)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta = e^{ikys \sin \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikv \sin \alpha} H_0^{(1)} \left( k \sqrt{x^2 + v^2} \right) dv = \frac{2e^{ikys \sin \alpha}}{i} \int_0^{\infty} J_0(k R_1 \sin \alpha) \lambda d\lambda$$

Далі, в інтегралі Зоммерфельда

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta \lambda) \frac{e^{-a \sqrt{\lambda^2 - v^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - v^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{iv \sqrt{a^2 + \beta^2}}}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} \quad (2.2)$$

шлях інтегрування проходить нижче особливої точки  $\lambda=v$ , тому його можна перемістити в область  $\text{Im} v > 0$ , не змінюючи величину інтеграла; згідно цього виконаємо

підстановку  $v=ix$ , ( $x > 0$ )

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta \lambda) \frac{e^{-a \sqrt{\lambda^2 + x^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{-x \sqrt{a^2 + \beta^2}}}{\sqrt{a^2 + \beta^2}} \quad (2.3)$$

Виконавши другу підстановку  $a=ik_1$ , отримаємо

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta \lambda) \frac{e^{-ik_1 \sqrt{\lambda^2 + x^2}}}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{-ix \sqrt{k_1^2 - \beta^2}}}{i \sqrt{k_1^2 - \beta^2}} ; \quad (2.4)$$

або, змінивши знак уявної частини,

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta\lambda) \frac{e^{ik_1\sqrt{\lambda^2+x^2}}}{\sqrt{\lambda^2+x^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{ix\sqrt{k_1^2-\beta^2}}}{-i\sqrt{k_1^2-\beta^2}} . \quad (2.5)^*$$

Застосовуючи останнє правило, знаходимо

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta\sin\alpha} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}\right) d\eta = 2e^{iks\sin\alpha} \frac{e^{ikxcos\alpha}}{kcos\alpha} .$$

Таким чином, як слідувало очікувати із фізичних міркувань, перший доданок формули (2.1)

$$\frac{-i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\eta\sin\alpha} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}\right) d\eta = e^{ikys\sin\alpha} e^{ikxcos\alpha} = \psi_0 .$$

Другий доданок формули (2.1) відповідає значенню  $\psi$ , взятому зі зворотнім знаком (принцип Бабіне).

Якщо позаду щілини ( $x > 0$ ) буде поле  $\psi_{щ}$ , то позаду полоси

$$(2.6) \quad \psi_{полоси} = \psi_0 - \psi_{щ} .$$

Звідси випливає, що полосу можна замінити відповідною сукупністю джерел, інтенсивність яких дорівнює інтенсивності падаючого поля. А фаза – протилежна.

Попереду полоси також будуть спостерігатися дифракційні явища. Для обчислення  $\psi$  поміщаємо поверхню інтегрування  $s$  попереду полоси. Напишемо

$$(2.7) \quad \psi = \psi_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\text{від}} \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta = \psi_0 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-a}^b e^{ik\eta\sin\alpha} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}\right) d\eta .$$

Змінимо напрям вісі  $x$  на  $180^\circ$ , виконавши підстановку  $x = -x_1$ , тоді

$$(2.8) \quad \psi = \psi_0 - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-a}^b e^{ik\eta\sin\alpha} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{x_1^2+(y-\eta)^2}\right) d\eta .$$

Світло, відбите від полоси, дифрагує так само, як світло від дзеркального зображення джерела, що пройшов крізь щілину в екрані, розташовану на місці полоси (рис. 16).

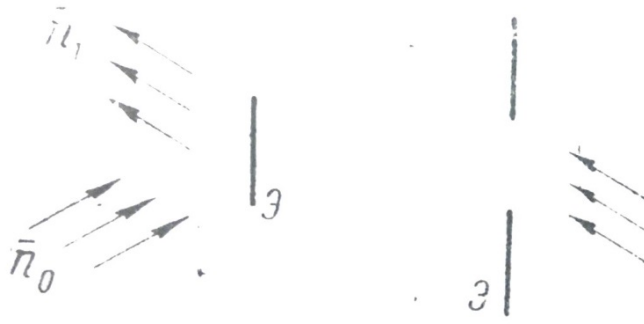


Рис. 16.Світло, відбите від полоси та світло, що пройшло крізь щелину

### Дифракція від циліндра

Нехай на нескінченно довгий, ідеально відбиваючий круговий циліндр радіусом  $a$ , вісь якого співпадає з віссю  $z$  (рис. 17), падає плоска хвиля

$$\psi = e^{-i\omega t} e^{-ikx} = e^{-i\omega t} e^{-ikR\cos\varphi} . \quad (2.9)$$

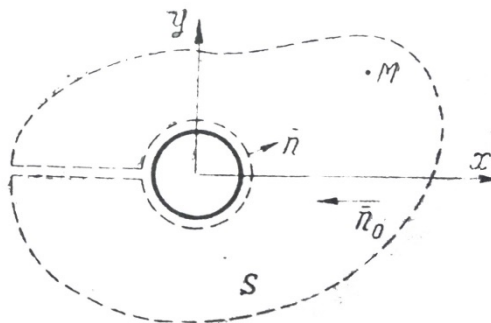


Рис. 17.Дифракція від циліндра

При розрахунку дифракції на щілині було прийнято, що у площині щілини  $\psi = \psi_0$ , т. ч. відповідає неспотвореній падаючій хвилі. Далі, при розрахунку дифракції від полоси було прийнято, що величина відбитої хвилі  $\psi_{\text{від}}$  на відбиваючій поверхні полоси відповідає величині падаючої хвилі, т. ч.

$$(2.10) \quad \psi = \psi_0$$

Тут і надалі будемо рахувати, що у освітленої сторони відбиваючої поверхні завжди, незалежно від її форми, виконується співвідношення (2.9). в дійсності, це співвідношення буде виконуватись точно тільки при  $\lambda \rightarrow 0$ ; воно буде достатньо точним, якщо  $\lambda$  достатньо мала. Достатньо мале значення можна визначити лише порівнянням з даними досліду чи суворої теорії. Рівність (2.10) можна було б написати у більш загальному вигляді

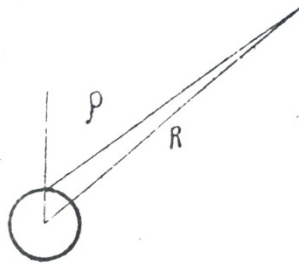


Рис. 18 Дифракція від циліндра

$$\psi_{\text{від}} = e^{i\delta} \psi_0,$$

де  $e^{i\delta}$  – деякий фазовий множник, який враховує, що при відбитті фаза хвилі може змінитися. Однак, оскільки теорема Кірхгофа не має засобів для визначення цього множника, ми будемо його опускати. У неосвітленій частині поверхні відбиваючого тіла будемо рахувати  $\psi = 0$ .

У випадку дифракції від циліндра обираємо поверхню інтегрування  $s$ , як показано на рис. 17. одна частина покриває поверхню циліндра, інша частина відноситься у нескінченність. Інтегрування будемо проводити тільки по тій частині  $s$ , яка покриває освітлену сторону циліндра.

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi} \int_s \dots ds \quad .$$

Надалі доданок  $\psi_0$  будемо опускати, т. ч. обчислювати у точці  $M$  тільки ту частину поля, яку посиляє відбиваюче тіло. Згідно сказаному, будемо знаходити

$$\psi = \frac{-1}{4\pi} \int_s \left\{ \psi_{\text{від}} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{\partial \psi_{\text{від}}}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right\} ds \quad .$$

Позначимо координати точки на поверхні циліндра через  $a, \varphi_1, \zeta$ ; координати точки спостереження через  $R, \varphi, 0$ ; позначимо ще (рис.18):

$$\rho = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos(\varphi_1 - \varphi)} \approx R - a \cos(\varphi_1 - \varphi) \approx R \quad .$$



Тоді

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos(\varphi_1 - \varphi) + \zeta^2} = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{a - R \cos(\varphi_1 - \varphi)}{r} \approx - \frac{R \cos(\varphi_1 - \varphi)}{r} .$$

Рахуючи, що радіус циліндра  $a \gg \lambda$ , отримаємо (рис. 5):

$$\psi_{\text{вд}} \Big|_{R=a} \approx e^{-ik \cos \varphi_1} \frac{e^{ik(r_1 - O'N)}}{\sqrt{r_1}} \sqrt{ON} \Big|_{R=a} = e^{-ik \cos \varphi_1} ;$$

$$\frac{\partial \psi_{\text{вд}}}{\partial n} \Big|_{R=a} \approx e^{-ik \cos \varphi_1} \frac{ike^{ik(r_1 - O'N)}}{\sqrt{r_1}} \sqrt{ON} \cos \varphi_1 \Big|_{R=a} = ike^{-ik \cos \varphi_1} \cos \varphi_1 .$$

Таким чином, для достатньо великих відстаней отримуємо

$$\varphi = \frac{-1}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ad\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-ik \cos \varphi_1} \frac{e^{ikr}}{r} ik \frac{R \cos(\varphi_1 - \varphi)}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} ike^{-ik \cos \varphi_1} \cos \varphi_1 \right] d\zeta = i = \frac{ika}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ik \cos \varphi_1} d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} d\tau \quad (2.11)$$

Перший із внутрішніх інтегралів виражається через функцію Ханкеля

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\rho\sqrt{1+\tau^2}}}{\sqrt{1+\tau^2}} d\tau = \pi i H_0^{(1)}(k\rho) .$$

Для другого із внутрішніх інтегралів знайдемо вираз, справедливий при  $k\rho \gg 1$

$$I_2 = \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\rho\sqrt{1+\tau^2}}}{\sqrt{1+\tau^2}} d\tau .$$

Помічаємо, що  $\frac{\partial I_2}{\partial(k\rho)} = iI_1 = -\pi H_0^{(1)}(k\rho)$ , отже,

$$I_2 = -\pi \int_{\infty}^{k\rho} H_0^{(1)}(z) dz = -\pi \left\{ H_1^{(1)}(k\rho) + \frac{H_2^{(1)}(k\rho)}{k\rho} + \dots \right\} \approx -\pi H_1^{(1)}(k\rho) .$$

Нам залишається тільки обчислити інтеграл

$$\psi = \frac{ika}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ik \cos \varphi_1} \left[ \pi i H_0^{(1)}(k\rho) \cos \varphi_1 - \frac{R}{\rho} \cos(\varphi_1 - \varphi) \pi H_1^{(1)}(k\rho) \right] d\varphi_1 \approx$$

$$\approx \frac{ika}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ik \cos \varphi_1} \left[ i \cos \varphi_1 H_0^{(1)} - \cos(\varphi_1 - \varphi) H_1^{(1)}(k\rho) \right] d\varphi_1 . \quad (2.12)$$

Застосовуючи ще раз умову  $k\rho \gg 1$ , запишемо

$$\begin{aligned}
\psi &= \frac{ika}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikac\cos\varphi_1} \left[ i\cos\varphi_1 \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i\left(k\rho - \frac{\pi}{4}\right)} - \cos(\varphi_1 - \varphi) \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i\left(k\rho - \frac{3\pi}{4}\right)} \right] d\varphi_1 \approx \\
&\approx \frac{ika}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikac\cos\varphi_1} \left[ i\cos\varphi_1 e^{ik\rho} + i\cos(\varphi_1 - \varphi) e^{ik\rho} \right] d\varphi_1 \approx \\
&\approx \frac{-ka}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikac\cos\varphi_1} e^{ik[R - a\cos(\varphi_1 - \varphi)]} \left[ \cos\varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi) \right] d\varphi_1 \approx \\
&\approx \frac{-kac\cos\frac{\varphi}{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2kac\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(\varphi_1 - \frac{\varphi}{2}\right)} \cos\left(\varphi_1 - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi_1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Останній інтеграл в кінцевому вигляді через відомі функції не  
(2.14) ається; підстановкою  $\psi_1 - \frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{2} = \beta$  він приводиться до вигляду

$$I = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\pi - \varphi}{2}} e^{-ip\sin\beta} \sin\beta d\beta, \quad p = 2kac\cos\frac{\varphi}{2}$$

Оскільки

$$e^{-ip\sin\beta} = J_0(p) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ J_{2n}(p) \cos 2n\beta - iJ_{2n-1}(p) \sin(2n-1)\beta \right],$$

то інтеграл I зображається у вигляді ряду по циліндричним функціям

$$(2.15) \quad I = 2 \cos\frac{\varphi}{2} J_0(p) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(p) \frac{\cos n\varphi \cdot \cos\frac{\varphi}{2} + 2n \sin n\varphi \cdot \sin\frac{\varphi}{2}}{4n^2 - 1} - \pi i J_1(p)$$

Для великих кутів  $|\varphi| \approx \pi$ , величина  $p \ll 1$ , і

$$I = 2 \cos\frac{\varphi}{2} - ipr = 2 \cos\frac{\varphi}{2} (1 - i\pi ka).$$

При великому радіусі циландра  $ka \gg 1$  і не дуже великих кутах  $\varphi$  (2.16)

при цьому

$$\begin{aligned}
J_0(p) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \cos\left(p - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
J_{2n} &\approx (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \cos\left(p - \frac{\pi}{4}\right), \\
4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\varphi}{4n^2 - 1} &= 2 - \pi \cos\frac{\varphi}{2}, \\
4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n \sin n\varphi}{4n^2 - 1} &= -\pi \sin\frac{\varphi}{2}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

З рівностей (2. 15) і (2. 17) отримуємо

$$I \approx \sqrt{\left(\frac{2}{\pi p}\right)} \left[ 2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left( p - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( p - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[ \left( \pi \cos \frac{\varphi}{2} - 2 \right) \cos \frac{\varphi}{2} + \pi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] + \pi i \sin \left( p - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \cos$$

Підстановка (2.18) в (2. 11) дає (2.18)

$$\psi = \frac{-ka \cos \frac{\varphi}{2}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi p}} \pi e^{-i\left(p - \frac{\pi}{4}\right)}$$

або

$$(2.19) \quad \psi = \sqrt{\frac{a}{2R}} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{ikR} e^{-i2ka \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Асимптотична формула (2.19) ( $ka \gg 1$ ) за виключенням фазових множників співпадає з формулою, отриманою засобами геометричної оптики

$$|\psi|^2 = \frac{a}{2R} \cos \frac{\varphi}{2} = \Psi.$$

Таким чином, зі збільшенням радіуса циліндра  $\psi$  зростає пропорційно  $\sqrt{a}$ . Однак, якщо об'єкт не дуже велике  $a$ , залежність  $\psi$  від  $a$  не буде монотонною.

Розглянемо, наприклад, випадок  $\varphi = 0$

$$(2.20) \quad I_{\varphi=0} = \int_0^{\pi} e^{-ip_0 \sin \beta} \sin \beta d\beta.$$

Функція Струве нульового порядку зображається інтегралом

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \sin z t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \sin \beta) d\beta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(z \sin \beta) d\beta.$$

Похідна від  $H_0(z)$  дорівнює

$$H_0'(z) = \frac{2}{\pi} - H_1^{\square}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \beta) \sin \beta d\beta,$$

отже,

$$(2.21) \quad I_{\varphi=0} = \int_0^{\pi} \cos(p_0 \sin \beta) \sin \beta d\beta - i \int_0^{\pi} \sin(p_0 \sin \beta) \sin \beta d\beta = 2 - \pi H_1(p_0) - i\pi J_1(p_0);$$

$$p_0 = 2ka.$$

Асимптотичний вираз формули (2.21) має вигляд

$$(2.22) \quad I_{\varphi=0} = \left\{ \frac{-1}{p_0^2} + \frac{1^2 \cdot 3}{p_0^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{p_0^6} + \dots \right\} + \pi \sqrt{\frac{2}{\pi p_0}} e^{-i\left(p_0 - \frac{\pi}{4}\right)} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8p_0)^2} + \dots \right\} + i + \pi \sqrt{\frac{2}{\pi p_0}} e^{i\left(p_0 - \frac{\pi}{4}\right)} \left\{ \frac{4-1^2}{1!8p_0} - \dots \right\}$$

звідки випливає немонотонність залежності  $\psi$  від  $a$ . Фізичною причиною цього явище є інтерференція випромінення вторинних джерел Гюйгенса на поверхні циліндру. В області  $|\varphi| \approx \pi$  (2.16) і (2.13) дають іншу залежність  $\psi$  від  $a$

$$(2.23) \quad \psi \approx i \sqrt{2\pi} (ka)^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

### 3. ВЕКТОРИЗОВАНІ ФОРМИ ІНТЕГРАЛА КІРХГОФА

#### 3.1. Загальні зауваження

Формула Кірхгофа не враховує поляризацію поля, тобто його векторний характер, і це ускладнює застосування формули в вирішенні задач дифракції електромагнітних хвиль.

Падаюче поле може бути поляризоване різним чином по відношенню до екрану і в залежності від поляризації поля дифракційні явища будуть протікати різним чином.

Електромагнітне поле описується векторними величинами  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  (або векторними потенціалами  $\vec{Z}$  і  $\vec{Z}^*$ ) і фактично необхідно вирішити з виконанням відповідних граничних умов витікаючи з рівнянь Максвелла векторне хвильове рівняння:

$$\Delta^2 f + k^2 f = 0$$

де під  $\bar{f}$  розуміється один із названих векторів. Це рівняння еквівалентне системі із трьох скалярних хвильових рівнянь для компоненти  $\bar{f}$  по координатам, які в загальному випадку неможливо вирішити окремо, так як змінні не розділяються. Формула Кірхгофа є розв'язком одного скалярного рівняння  $\Delta\psi + k^2\psi = 0$  і, суворо кажучи, не може допомогти в вирішенні поставленої задачі.

Можна робити спроби в якості величини  $\psi$  в формулі Кірхгофа розглядати одну з компонент вектора  $\bar{E}$  (або  $\bar{H}$ ). Тоді і в дифрагованому полі буде визначена лише ця компонента. Далі з'являються неподоланні труднощі: якщо рахувати інші дві складові рівні нулю, рівняння Максвелла виявляться порушеними; якщо ж поставити задачу пошуку інших складових, то виявляється, що для її вирішення не маємо достатньо даних. Можна, також в якості  $\psi$  розглядати одну з компонент векторного потенціалу диференціювання і лише потім знаходити вектори  $\bar{E}$  і  $\bar{H}$  відомими операціями диференціювання. Проте, в цьому випадку результат буде залежати від того, яку з складових векторного потенціалу ми вибираємо за вихідну; результат буде також залежати від того, який саме векторний потенціал застосовується: електричний чи магнітний.

Незважаючи на вказані труднощі, такі спроби все ж робляться, так як метод знаходження дифрагованого поля за допомогою формули Кірхгофа дуже просто, а отримана при цьому помилка може бути при сприятливих умовах порівняно невелика. Нижче буде проведене порівняння результатів, отриманих за допомогою формули Кірхгофа в попередньому розділі, з більш точними рішеннями.

Розглянемо тепер більш точні методи вирішення, в яких враховується векторний характер електромагнітного поля. Ці методи є логічним розвитком теорії Кірхгофа і мають з нею загальні риси: 1) величина дифрагованого поля в даній точці є інтегралом по замкнутій поверхні, навколо даної точки, причому функція, що стоїть під інтегралом, визначається величиною поля і відповідними похідними; 2) при фактичному виконанні обчислень дифракційні спотворення

падаючого поля на поверхні інтегрування не враховуються. Іншими словами, уточненням є урахування векторного характеру другорядних джерел Гюйгенса.

Вираз для підінтегральних функцій даються різними авторами в різній формі, хоча вони і повинні співпадати по величині в кожній точці поверхні інтегрування;

останнє слідує із довільності вибору поверхні інтегрування і однозначності вирішення. Все ж, з точки зору обчислювальної практики, ці формули можуть бути не рівноцінними. Надалі ще повернемося до цього питання.

### 3.2. Формули Стреттона і Чу

Один із шляхів уточнення результату, отриманого застосуванням формули Кірхгофа, вказали Стреттон і Чу. Висновок шуканої формули вони засновують на векторному аналізі теореми Гріна:

$$\oint_V \{ \bar{Q} \operatorname{rot} \bar{P} - \bar{P} \operatorname{rot} \bar{Q} \} dv = \oint_S \{ \bar{P} \operatorname{rot} \bar{Q} - \bar{Q} \operatorname{rot} \bar{P} \} nds, \quad (3.1)$$

отриманій ними додованням формули Гаусса-Остроградського до вектору  $[\bar{P} \operatorname{rot} \bar{Q}]$ , ( $\bar{n}$  - зовнішня нормаль до поверхні). Автори, пишуть рівняння електромагнітного поля в вигляді:

$$\operatorname{rot} \vec{H} + i\omega\epsilon \vec{E} = \vec{j} \div \vec{E} = \rho / \epsilon \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} - i\omega\mu \vec{H} = -\vec{j}^* \div \vec{H} = \rho^* / \mu$$

Фіктивні  $\vec{j}^*$  - густина магнітного струму і  $\rho^*$  - густина магнітного заряду вводяться для того, щоб отримати можливість розглядати розриви тангенціальної складової  $\vec{E}$ , забороненої рівняннями Максвелла. До рівнянь (3.2) додаються:

$$\operatorname{div} \vec{j} = i\omega\rho; \operatorname{div} \vec{j}^* = i\omega\rho^*. \quad (3.3)$$

Із рівнянь (2.2) слідує:

$$\text{rot rot } \vec{E} - k^2 \vec{E} = i\omega\mu \vec{j} - \text{rot } \vec{j} \quad (3.4)$$

$$\text{rot rot } \vec{H} - k^2 \vec{H} = i\omega\varepsilon \vec{j} + \text{rot } \vec{j}$$

де  $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ .

Вважаючи в (3.1)  $\vec{P} = \vec{E}, \vec{Q} = \varphi \vec{a}, \quad \varphi = \frac{e^{ikr}}{r},$

де  $\vec{a}$  - постійний вектор довільного напрямку,

$r$  - відстань від елемента поверхні  $ds$  до точки спостереження, і провівши неважкі перетворення, отримуємо

$$\int_V \omega\mu \vec{j} \varphi - [\vec{j}^* \text{grad } \varphi] + \frac{\rho}{\varepsilon} \text{grad } \varphi \} dv = \int_S \omega\mu [\vec{n} \vec{H}] \varphi + [\vec{n} \vec{E}] \text{grad } \varphi - \vec{n} \vec{E} \cdot \text{grad } \varphi \} ds, \quad (3.5)$$

5)

Формула (3.5) справедлива при умові аналітичності підінтегральних функцій; так як функція  $\varphi$  цим умовам не задовольняє при  $r = 0$ , то в обсязі інтегрування потрібно вирізати сферу  $\Sigma$  малого радіуса з центром в точці спостереження, а до інтегралу по поверхні  $S$  додати інтеграл по поверхні сфери  $\Sigma$ . Так само, як і при виведенні формули Кірхгофа, зменшуючи радіус сфери до нуля, отримаємо поле в точці спостереження:

$$\begin{aligned} \vec{E} = & -\frac{1}{4\pi} \int_V \omega\mu \vec{j} \varphi - [\vec{j}^* \text{grad } \varphi] + \frac{\rho}{\varepsilon} \text{grad } \varphi \} dv - \\ & -\frac{1}{4\pi} \int_S \omega\mu [\vec{n} \vec{H}] \varphi + [\vec{n} \vec{E}] \text{grad } \varphi - \vec{n} \vec{E} \cdot \text{grad } \varphi \} ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Проводячи аналогічні викладки або використовуючи симетрію рівнянь (3.2) і просто зробивши відповідні заміни в (3.6) можна отримати

$$\begin{aligned} [i\omega\varepsilon \vec{j} \varphi + [\vec{j} \text{grad } \varphi] + \rho/\mu \text{grad } \varphi] dv + \frac{1}{4\pi} \int_S [i\omega\varepsilon [\vec{n} \vec{E}]] \varphi - [[\vec{n} \vec{H}] \text{grad } \varphi] - \vec{n} \vec{H} \cdot \text{grad } \varphi \} ds \\ \vec{H} = \frac{-1}{4\pi} \int_V \{ \end{aligned} \quad (3.7)$$

Величини  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  з формул (3. 6) та (3. 7), задовольняють рівняння Максвелла.

Оскільки поверхня інтегрування  $S$  зазвичай обривається таким чином, щоб всередині неї екрани були відсутніми, то всередині об'єму  $V$   $\rho = \rho^{\text{в}} = \vec{j} = \vec{j}^{\text{в}} = 0$ . При цьому отримуються шукані формули:

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi} \int_S \left\{ i\omega\mu [\vec{n}\vec{H}] \varphi - [\vec{n}\vec{E}] \text{grad} \varphi + \vec{n}\vec{E} \cdot \text{grad} \varphi \right\} ds. \quad (3. 8)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ i\omega\varepsilon [\vec{n}\vec{E}] \varphi - [\vec{n}\vec{H}] \text{grad} \varphi - \vec{n}\vec{H} \cdot \text{grad} \varphi \right\} ds. \quad (3. 9)$$

Можна виключити  $\vec{H}$  з (2. 8) на основі (3. 2) і розглядати отриману при цьому формулу:

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi} \int_S \left\{ [\vec{n} \text{rot} \vec{E}] \varphi + [\vec{n}\vec{E}] \text{grad} \varphi + \vec{n}\vec{E} \cdot \text{grad} \varphi \right\} ds. \quad (3. 10)$$

Як рішення хвильового рівняння  $\nabla^2 \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0$ ; однак це, очевидно, не несе практичного інтересу, як і у відношенні  $\vec{H}$ .

Якщо тепер визначити поверхневі щільності:

$$\begin{aligned} \text{електричного струму: } \vec{j} &= -[\vec{n}\vec{H}] \\ \text{електричного заряду: } \sigma &= -\varepsilon \vec{n}\vec{E} \\ \text{магнітного струму: } \vec{j}^{\text{в}} &= [\vec{n}\vec{E}] \end{aligned} \quad (3. 11)$$

і підставити (3. 11) в (3. 8), то отримаємо

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi} \int_V \left\{ -i\omega\mu \vec{j} \varphi + [\vec{j}^{\text{в}} \text{grad} \varphi] - \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{grad} \varphi \right\} ds \quad (3. 12)$$

І аналогічне рівняння для  $\vec{H}$ .

Значення  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , знайдені за формулами Стреттона і Чу (3. 8), (3. 9) та (3. 12), задовольняють рівняння Максвелла.



Для випадку дифракції від отвору Стреттон і Чу приводять формулу (3.12) до вигляду:

$$\text{grad } \varphi \cdot \vec{n} d\vec{l} - \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} \left[ i\omega\mu [\vec{n} \vec{H}] \varphi + [[\vec{n} \vec{E}]] \text{grad } \varphi + \vec{n} \vec{E} \cdot \text{grad } \varphi \right] ds$$

$$\vec{E} = \frac{-1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{4\pi} \oint_C \vec{dl} \quad (3.13)$$

Враховуючи, що на границі отвору (контур C), струми  $\vec{j}$  та  $\vec{j}^i$  будуть мати розрив, якщо вважати, що на тіневій стороні екрану  $\vec{E} = \vec{H} = 0$ . Автори наголошують, що формула (3.13) цілком ідентична формулі Коттлера :

$$4\pi \vec{E} = \frac{-1}{i\omega\epsilon} \oint_C \vec{H} \text{grad } \varphi d\vec{l} + \oint_C \varphi [\vec{E} d\vec{l}] - \int_{s_1} \left\{ \vec{E} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} \right\} dS \quad (3.14)$$

Аналогічно отримується формула для магнітного поля

$$\frac{\vec{E} \text{grad } \varphi d\vec{l} + \oint_C \varphi [\vec{H} d\vec{l}] - \int_{s_1} \left\{ \vec{H} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \vec{H}}{\partial n} \right\} dS}{\vec{E} \text{grad } \varphi d\vec{l} + \int_{s_1} \left\{ i\omega\epsilon [\vec{n} \vec{E}] \varphi - [[\vec{n} \vec{H}]] \text{grad } \varphi - \vec{H} \vec{n} \text{grad } \varphi \right\} dS} = \frac{1}{i\omega\epsilon} \oint_C \vec{dl}$$

$$4\pi \vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \oint_C \vec{dl} \quad (3.15)$$

Значення  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , наведені в формулах (3.14) та (3.15), також задовольняють рівняння Максвелла.

Порівнюючи з формулою Кіргофа (3.2), наприклад, формулу (3.10), можна помітити, як саме відображається на рішенні векторний характер поля.

Не зупиняючись на виведенні формул (3.14) та (3.15), зробимо стосовно них одне зауваження: оскільки формули містять інтеграли по границях отвору, де поле, яке потрапляє спотворено під впливом екрану більш за все, оскільки на перший погляд може здатись, що це негативно відобразиться точності результату. Та насправді точність буде такою ж, як і при обчисленні за формулами, в які входять лише поверхневі інтеграли, оскільки в останніх інтегрування проводиться по всій площі отвору, відповідно, і по ділянках,

якогома близьких до границь, що означає, що фактично приймається така ж степінь приближення. Можливість перетворення форми (3. 12) до (3. 14) однозначно це підтверджує.

Для узагальнення даного розділу підмітимо, що класичний метод отримання формул (3.8) та (3.9) робить очевидним їх наступництво по відношенню до формули Кіргофа, аналогічно наступництву останньої до відомої формули теорії потенціалу

(  $\kappa=0$  ). Порівнюючи виведення формул (3.8), (3.9) з виведенням формули Кіргофа, помічаємо, що різниця полягає в застосуванні (3.1) замість теореми Гріна і функції  $\frac{e^{ikr}}{r}$  замість  $\frac{e^{ikr}}{r}$ . Тому вважаємо можливим називати (3.8) і (3.9) векторизованими формами інтеграла Кіргофа.

### 3.3. Рішення за допомогою принципу еквівалентності

Іншим способом рекомендується розв'язувати задачі про дифракцію електромагнітних хвиль в ряді робіт Щелкунова, а саме за допомогою принципу еквівалентності. Доведення принципу еквівалентності і більш узагальної теореми індукції можна знайти у роботах Щелкунова.

В 1901 році Лав (Love A. E.) відкрив наступний принцип еквівалентності: «поле у вільній від джерел області  $\nu$ , з обмеженою поверхнею  $s$ , може бути породжене електричними та магнітними струмами, розподіленими по цій поверхні, і в цьому сенсі дійсні джерела поля можна замінити «еквівалентними» поверхневими струмами».

$$\vec{j} = [\vec{n} \vec{H}^i], \quad \vec{j}^i = [\vec{n} \vec{E}^i] \quad (3. 16)$$

Де:  $\vec{E}^i \vec{H}^i$  - поле на поверхні  $s$ , яке створене дійсними джерелами  $Q$ ;  $\vec{n}$  - нормаль до поверхні  $s$ , напрямлена всередину області  $\nu$ .

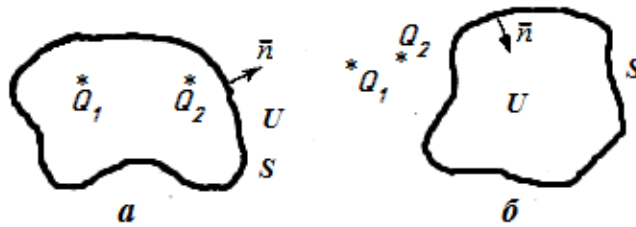


Рис. 19 Область  $U$ : а – необмежена; б - обмежена

Область  $U$  може бути необмеженою (рис. 19а) або обмеженою (рис. 19б); вибір поверхні  $S$  проводиться в залежності від задачі, яка вирішується.

Обчисливши еквівалентні поверхневі струми  $\vec{j}$  і  $\vec{j}^e$  за формулами (3. 16), можна знайти магнітний векторний потенціал, який вони створюють

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{j} \frac{e^{ikr}}{r} ds \quad (3. 17)$$

і електричний векторний потенціал

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \int_S \vec{j}^e \frac{e^{ikr}}{r} ds \quad (3. 18)$$

і, нарешті, обчислити поле:

$$\vec{E} = i\omega\mu \vec{A} - \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{grad} \text{div} \vec{A} - \text{rot} \vec{F} \quad (3. 19)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} - \frac{1}{i\omega\mu} \text{grad} \text{div} \vec{F} + i\omega\epsilon \vec{F} \quad (3. 20)$$

Можна показати, що результати проведених таким чином розрахунків будуть співпадати з результатами, отриманими за формулами Стреттона і Чу.

Насправді, застосовуючи позначення хвильової функції  $\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}$  і скалярного потенціалу

$$u = \frac{\text{div} \vec{A}}{i\omega\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \int_S \sigma \varphi ds,$$

з формул (3. 17) (3. 18) (3. 19) отримуємо

$$\begin{aligned} \vec{j} \varphi ds - \frac{1}{4\pi\epsilon} \text{grad}_1 \int_S \sigma \varphi ds - \frac{1}{4\pi} \text{rot}_1 \int_S (\varphi \vec{j}^e) ds \\ \vec{E} = i\omega\mu \frac{1}{4\pi} \int_S \end{aligned} \quad (3. 21)$$

Оскільки диференціювання проводиться по координатах точки спостереження, то

$$\begin{aligned}
grad_1(\sigma\varphi)dS &= \dot{i} \frac{1}{\varepsilon} \int \sigma grad_1\varphi dS, \\
\sigma\varphi dS &= \dot{i} \frac{1}{\varepsilon} \int_s \dot{i} \\
\frac{1}{\varepsilon} grad_1 \int_s \dot{i} \\
rot_1 \int_s (\varphi \vec{j}^{\dot{i}}) dS &= \int_s rot_1(\varphi \vec{j}^{\dot{i}}) dS = \int_s [grad_1\varphi \vec{j}^{\dot{i}}] dS, \\
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi} \int_s i\omega\mu \vec{j} \varphi dS - \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\sigma}{\varepsilon} grad_1\varphi dS + \frac{1}{4\pi} \int_s \vec{j}^{\dot{i}} \cdot grad_1\varphi dS
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Формула (3. 22) співпадає з формулою Стреттона і Чу. Інший знак у доданках, які містять градієнт, отримується в формулі (3. 22) внаслідок того, що при виведенні останньої диференціювали по координатах точки спостереження, що відмічено індексом 1.

Таким чином обидва методи вирішення дають однаковий результат. Як зазначає Щелкунов, перевага принципу еквівалентності полягає в тому, що окрім своєї евристичної ролі він скорочує математичну роботу. Здається, що з цією думкою варто погодитись, оскільки про обчисленні поля за формулою (3. 19) необхідно знайти тільки два інтеграли  $\vec{A}$  і  $\vec{F}$ , тоді як в формулу (3. 22) входять три інтеграла того ж типу. Як видно з попередньої глави, інтеграли навіть в простих задачах можуть бути доволі складними. Правда, в формулу (3.19) входять диференційовані оператори, але диференціювання, як правило, завжди простіше інтегрування.

В наступних розділах цієї глави будемо знаходити рішення, застосовуючи принцип еквівалентності. Замість формул (3. 19) і (3. 20) будемо застосовувати формули (3. 27) та (3. 28), які отримуються з (3. 19) і (3. 20) наступним неважким перетворенням.

Оскільки нас цікавлять величини з гармонічною залежністю від часу, то магнітний векторний потенціал можемо замінити на електричний вектор Герца.

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = -i\omega \vec{Z} \tag{3.23}$$

І електричний векторний потенціал – на магнітний вектор Герца

$$\vec{F} = \frac{\partial \vec{Z}^e}{\partial t} = -i\omega \vec{Z}^e \quad (3.24)$$

Тоді інтеграл від електричних струмів дасть електричний вектор Герца

$$\vec{Z} = \frac{1}{4\pi\omega} \int \vec{j} \frac{e^{ikr}}{r} ds, \quad (3.25)$$

а інтеграл від магнітних струмів дасть магнітний вектор Герца

$$\vec{Z}^e = \frac{1}{4\pi\omega} \int \vec{j}^e \frac{e^{ikr}}{r} ds. \quad (3.26)$$

Замість формул (3.19) і (3.20):

$$\vec{E} = \frac{k^2}{\epsilon} \vec{Z} + \frac{1}{\epsilon} \text{grad} \div \vec{Z} + i\omega \text{rot} \vec{Z}^e \quad (3.27)$$

$$\vec{H} = \frac{k^2}{\mu} \vec{Z}^e + \frac{1}{\mu} \text{grad} \div \vec{Z}^e - i\omega \text{rot} \vec{Z} \quad (3.28)$$

При застосуванні векторів Герца краще відтіняється походження векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  від електричних чи магнітних струмів.

Як в формулюванні принципу еквівалентності, так і в висновку Стреттона і Чу вводиться поняття магнітних струмів. Застосування в фізичній теорії фіктивних величин, хоча б зручних для математичного аналізу, залишає деяку незадоволеність, оскільки їх фізичний зміст залишається не розкритим. В своїй роботі Щелкунов зупиняється на питанні про фізичний зміст поняття «магнітного струму», розподіленого в просторі, але не для випадку поверхневого магнітного струму. Інші автори задовольняються формальним визначенням «магнітного струму». У посібниках з теорії електромагнітного поля це питання не піднімається, ймовірно, винятком є книга Щелкунова. Тому вважаємо доречним зупинитись на цьому питанні.

### 3.4. Профізичний зміст терміну «листок магнітного струму»

В процесі розвитку природознавства, зокрема фізики, первинно введені поняття і віддзеркалюючи їх терміни або відмирають, або наповнюються новим змістом; в міру розширення об'єму знання з'являються нові поняття та нові терміни.

Так, в теперішній час вже не вживаються такі терміни як «електрична рідина», «магнітна рідина» і т.д. Однак деякі терміни, яві висловлюють фіктивні або умовно фіктивні поняття, збереглися до цього часу і деякі з них сприяють представленню картини реального електромагнітного поля. До них можна віднести такі терміни як «магнітний заряд», «магнітна провідність», «магнітний струм», «магнітний диполь» та інші.

В ролі магнітного диполя зазвичай представляється елементарна рамка електричного струму. Заміна елементарної рамки магнітним диполем дає можливість спростити аналіз та відомим способом перевести у відповідність різні формули для поля рамки з формулами для електричного диполя. Сукупність магнітних диполів зі спільною віссю  $\nu$  може розглядатись як лінійний магнітний струм (рис. 20а).

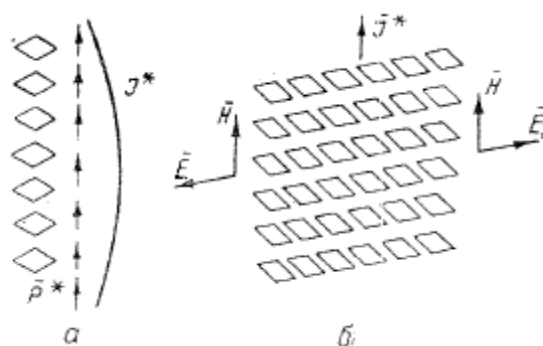


Рис. 20 Листок магнітного струму

Навпаки, лінійний магнітний струм можна розкласти на магнітні диполі, тобто на елементарні рамки.

Розглянемо тепер деяку плоску поверхню, яку обтікає магнітний струм – листок магнітного струму. Розіб'ємо його на елементи – магнітні диполі (елементарні рамки). Струми, які протікають в прилеглих одна до одної сторонах (перпендикулярних до площини листка) сусідніх рамок – елементів (рис. 20б) взаємно компенсуються і залишається дія струмів тільки в тих сторонах рамок, які паралельні до площини листка. Ці сторони листка формують два листка електричного струму, розділені нескінченно малою відстанню, струми в яких напрямлені в протилежні сторони. Звідси слідує, що листок магнітного струму являє собою ніщо інше як подвійний листок електричного струму. Таким чином замість термінів «магнітний диполь» і «листок магнітного струму» можна застосовувати еквівалентні по змісту терміни «елементарні рамка» і «подвійний листок електричного струму».

Якщо на ділянці деякої поверхні одночасно наявні шар електричного струму та шар магнітного струму, причому вектори  $\vec{j}$  та  $\vec{j}^e$  перпендикулярні, то можна так підібрати їх величини, що на їх поля  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  з однієї сторони поверхні будуть додаватись, а на іншій – взаємознищуватись.

Оточимо довільне джерело поля, наприклад півхвильовий вібратор, поверхнею  $s$ , яка проходить через нього на достатньо великій відстані і співпадає з хвильовим фронтом.

Виділимо в якості вторинного джерела Гюйгенса елемент поверхні  $s$  і побудуємо систему сферичних координат таким чином, щоб початок відліків кутів  $\varphi$  співпадав з напрямком  $\vec{j}$ , а початок відліків кутів  $\theta$  співпадало з  $\vec{n}$  (рис. 21). Такий елемент поверхні  $ds$  буде випромінювати як комбінація взаємно-перпендикулярних електричного та магнітного диполів. Поле електричного диполя на відстані  $r \gg \lambda$

$$E = E_0 \sin \alpha$$

де

$$E_0 = 120 \pi \frac{kj(dl)^2}{4\pi r} \quad ; \quad \cos \alpha = \cos \varphi \sin \vartheta \quad .$$

Компоненти поля по координатах:

$$E_\varphi = E_0 \sin \varphi \quad ;$$

$$E_{\vartheta} = E_0 \cos \varphi \cos \vartheta$$

Поле елементарної рамки

$$E = E_0 \sin \beta$$

Де  $E_0$  - та ж величина, що і в електричного диполя, якщо виконується рівність

$$j^i = 120 \pi j \quad ; \quad \cos \beta = \sin \varphi \sin \vartheta$$

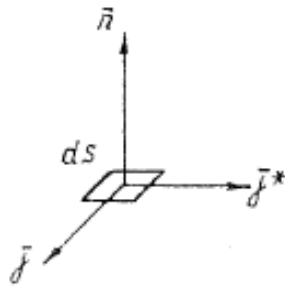


Рис. 21 Компоненти поля рамки

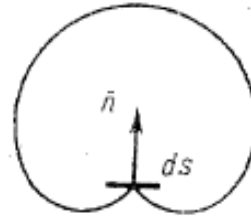
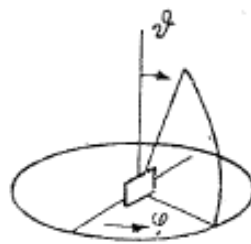


Рис. 22 Діаграма випромінювання елемента поверхні ds

Компоненти поля рамки по координатах

$$E_{\varphi} = E_0 \sin \varphi \cos \vartheta \quad E_{\vartheta} = E_0 \cos \varphi$$

Сумарне поле від диполя до рамки:

$$E_{\varphi} = E_0 \sin \varphi (1 + \cos \vartheta)$$

$$E_{\vartheta} = E_0 \cos \varphi (1 + \cos \vartheta)$$

$$|E'| = \sqrt{E_{\varphi}^2 + E_{\vartheta}^2} = E_0 (1 + \cos \vartheta)$$

Таким чином діаграма випромінювання елемента поверхні  $ds$  є тілом обертання, утвореного обертанням кардіоїди  $\sin(1 + \cos \vartheta)$  навколо нормалі  $\hat{n}$  до поверхні (рис. 22). Випромінювання назад відсутнє. Якщо поверхня  $s$  недостатньо віддалена від вібратора, то її елементи будуть випромінювати і в напрямку вібратора.

### 3.5. Хвильова теорія електромагнітного поля. Принцип Гюйгенса-Кірхгофа



Проекції векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  на осі прямокутної системи координат у всіх точках простору, де немає струмів і зарядів, в режимі сталих гармонійних коливань задовольняють скалярному хвильовому рівнянню.

$$\Delta^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{v}. \quad (3.29)$$

Останнє не важко вивести з рівнянь Максвелла для комплексних амплітуд  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ :

$$\text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon \vec{E}; \quad \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}.$$

Справді, з другого рівняння Максвелла випливає, що

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = \text{grad} \text{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -i\omega \mu \text{rot} \vec{H}$$

Підставляючи сюди значення  $\text{rot} \vec{H}$  з першого рівняння Максвелла і враховуючи, що  $\text{div} \vec{E} = 0$ , матимемо

$$\Delta^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0.$$

Отримане векторне рівняння в прямокутній системі координат розпадається на три ідентичних скалярних рівняння для проекцій  $\vec{E}$ , що збігаються з (3.29).

Міркування щодо вектора  $\vec{H}$  проводяться аналогічно. Проінтегруємо рівняння (3.29) в області  $V$ , обмеженої поверхнею  $S$ , використовуючи теорему Гріна

$$\int_V (\Delta^2 \psi - \theta \Delta^2 \psi) dV = \int_S \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (3.30)$$

Будемо вважати, що  $\varphi$  є функція, що задовольняє рівнянню (3.29), а

$$\theta = \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad (3.31)$$

де  $R$  - відстань від деякої точки  $P$  в області  $V$  до змінної точки інтегрування  $P_1$ .

Згідно умовам теореми Гріна функції  $\varphi$  і  $\theta$  повинні мати кінцеві похідні першого і другого порядку у всіх точках області  $V$ . Така вимога, як неважко

бачити, виконується всюди, за винятком точки Р, де функція  $\theta = e^{-ikR}/R$  звертається в нескінченність. Стало бути, останню крапку необхідно з розгляду виключити.

З цією метою оточимо точку Р сферичною поверхнею  $S_0$  малого радіусу  $R_0$  і напишемо теорему Гріна для області, обмеженою поверхнями  $S$  і  $S_0$ . Оскільки функція (3.31) теж задовольняє рівнянню (3.29), інтеграл за обсягом в лівій частині теореми звертається в нуль, і будемо мати:

$$\oint_{S+S_0} \left( \psi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (3.32)$$

На поверхні  $S_0$  похідна

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) = \frac{1}{R} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} + \frac{ik e^{-ikR}}{R} \right)$$

і, стало бути,

$$\oint_{S_0} \left( \psi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{R_0} \left( \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} + \frac{ik e^{-ikR_0}}{R_0} \right) \oint_{S_0} \psi dS + \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \oint_{S_0} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = I_0.$$

Застосувавши далі теорему про середнє, отримаємо

$$I_0 = \left( \frac{1}{R_0} + \frac{ik}{R_0} \right) \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \psi_{cp} 4\pi R_0^2 + \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \frac{\partial \psi}{\partial n} 4\pi R_0^2.$$

Так як  $\psi_{cp}$  і  $(\partial \psi / \partial n)_{cp}$  кінцеві, то при прагненні  $R_0$  до нуля

$$I_0 \rightarrow 4\pi \psi_{cp} = 4\pi \psi(P).$$

Таким чином, з рівності (3.19) випливає, що

$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_0} \left( \psi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \quad (3.33)$$

Знайдений вираз дозволяє визначити функцію  $\psi$  в будь-якій точці області  $V$  по відомим значенням  $\psi$  і  $\partial \psi / \partial n$  на граничній поверхні  $S$ .

Зауважимо, що граничні значення  $\psi$  і  $\partial \psi / \partial n$ , взагалі кажучи, не можуть вибиратися довільним чином, незалежно один від одного, бо рішення хвильового рівняння (3.30) буде єдиним, якщо на  $S$  задана або тільки функція  $\psi$  або її нормальна похідна  $\partial \psi / \partial n$ . З аналогічним обставиною ми вже зустрічалися при розгляді методу еквівалентних струмів.

Застосуємо рівність (3.32) до зовнішньої задачі. У цьому випадку слід вважати, що цікавить нас область укладена між

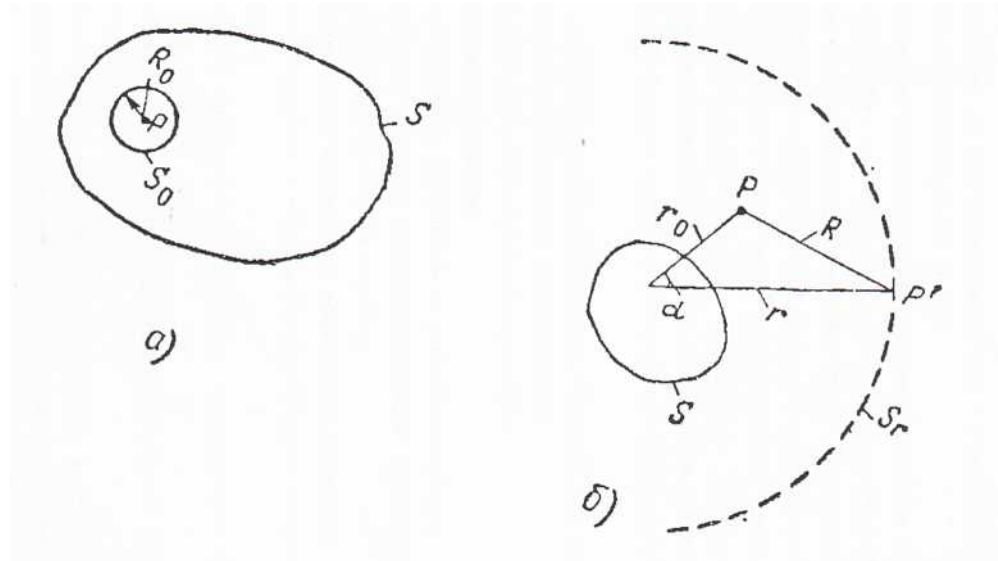


Рис. 23. До вирішення хвильового рівняння за допомогою теореми Гріна:  
а - внутрішнє завдання; б - зовнішня задача.

заданою поверхнею  $S$  і поверхнею сфери  $S_r$  нескінченно великого радіуса, центр якої знаходиться в точці, прийнятої за початок координат (рис. 23, б).

$$I_r = \oint_{S_r} \left( \psi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dS.$$

Нехай

Можна показати, що для великих  $R$  функція  $\theta$  дорівнює:

$$\theta = \frac{\exp(-ikR)}{R} \approx \frac{\exp(-ikr)}{r} \exp(ikr_0 \cos \alpha)$$

Тут  $r$  - радіус сферичної поверхні  $S_r$ ;  $r_0$  - відстань від початку координат до точки спостереження;  $\alpha$  - кут між променями  $OP$  і  $OP'$  (рис. 23, б).

Так як на  $S_r$  похідна  $\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$ , то з урахуванням наведених співвідношу

$$I_r = - \int_{S_r} \left[ \psi \left( ik + \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] \frac{\exp(-jkr)}{r} \exp(ikr_0 \cos \psi) dS$$

Цей інтеграл при  $r \rightarrow \infty$  буде прагнути до нуля, якщо

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \psi \left( ik + \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] r = 0.$$

або

$$\frac{\delta\psi}{\delta r}|_{r=r_0} = -\frac{1}{r_0}k + \frac{1}{r_0}\psi|_{r=r_0}. \quad (3.33')$$

Легко переконатися, що остання умова виконується, якщо функція  $\psi$  задовольняє принципу випромінювання на нескінченності, тобто.

$$\psi|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi) \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Стало бути, рівність (3.33) при виконанні умови (3.33') залишається справедливим і для зовнішньої області.

Розглянуте рівність являє собою аналітичну формулювання так званого принципу Гюйгенса - Кирхгофа. Цей принцип стверджує, що функція  $\psi$ , яка задовольняє скалярному хвильовому рівнянню, в будь-якій точці спостереження є суперпозиція сферичних хвиль, випромінюваних елементарними джерелами, розподіленими на заданій поверхні  $S$ .

Інтеграл (3.33), як побачимо нижче, може бути використаний для вирішення деяких завдань дифракції електромагнітних хвиль.

Зрозуміло, принцип Гюйгенса - Кирхгофа в електродинаміці слід розглядати як окремий випадок більш загального принципу еквівалентних струмів, що враховує векторний характер електромагнітного поля.

Принцип еквівалентних струмів, як відомо, дає можливість по заданих векторах  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  або їх дотичним складовим на вихідній граничній поверхні  $S$  визначити електромагнітне поле в будь-якій точці зовнішнього простору. Слід підкреслити, що згідно з цим принципом, поле в точці спостереження  $P$  є результат векторного додавання полів елементарних джерел, розподілених по всій поверхні  $S$ .

В якості вихідної граничної поверхні із заданими векторами поля можна вибрати, зокрема, якусь хвильову поверхню. Тоді за допомогою розглянутого методу ми можемо визначити в просторі будь-яку іншу хвильову поверхню і здійснювати послідовний перехід від однієї такої поверхні до іншої.

Викладені міркування складають основу хвильової теорії електромагнітного поля.

## Принцип еквівалентних струмів

Нехай в області I з параметрами середовища  $\varepsilon_1, \mu_1, g_1$  маються джерела поля  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . Потрібно визначити електромагнітне поле в зовнішньому (область II) з параметрами середовища  $\varepsilon_2, \mu_2, g_2$  (рис. 24).

Найдемо поле, збуджуване джерелами  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  у безграничному однорідному середовищі з параметрами  $\varepsilon_1, \mu_1, g_1$  – так зване поле джерел. Зрозуміло, що істинне поле у області I буде відрізнятися від поля джерел, так як електромагнітні хвилі повинні частково відбиватися від граничної поверхні S. Так само ж, поле в області II буде відрізнятися від того поля, яке збуджувалося б відомими джерелами у однорідному просторі з параметрами середовища  $\varepsilon_2, \mu_2, g_2$ .

Щоб визначити поле у заданій області, необхідно мати, як стверджує теорема єдиності, дотичні складові вектора **E** або вектора **H** на граничній поверхні S. Строго кажучи, ці складові нам не відомі, тому що вони можуть бути знайдені лише у результаті повного вирішення поставленої задачі. Однак у багатьох цікавих для практики випадках закон розподілу дотичних складових векторів **E** та **H** на граничній поверхні відомий з точністю, достатньою для інженерних розрахунків. Тоді задача по розрахунку електромагнітного поля в зовнішньому просторі зведеться до визначення поля в області II по відомим граничним значенням векторів **E** і **H** на поверхні S. Для вирішення такої задачі реальні джерела доцільно замінити деякими фіктивними еквівалентними джерелами, поле яких в області I рівне нулю, а у зовнішньому просторі співпадає з електромагнітним полем істинних джерел.

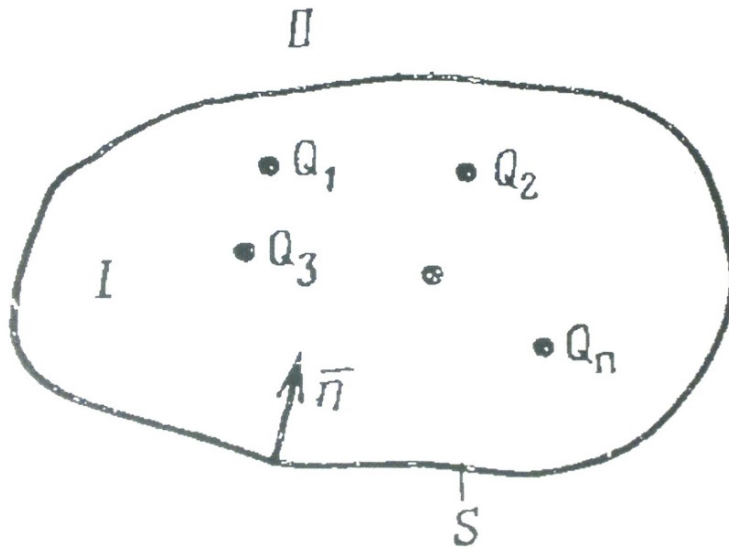


Рис.24. Пояснення принципу еквівалентних струмів.

Але поле еквівалентних джерел (  $E', H'$  ) буде співпадати у зовнішньому просторі з істинним електромагнітним полем, якщо на поверхні  $S$ :

$$\begin{cases} E'_{2tg} = E_{2tg} \\ H'_{2tg} = H_{2tg} \end{cases} \quad (3.34)$$

Насправді із теореми єдності витікає, що ці поля будуть однаковими, якщо на  $S$  виконується тільки одна із умов (3.34), друга умова при цьому задовольняється автоматично. Зрозуміло, що поле забезпечує також принцип випромінювання на нескінченості. Що ж до області  $I$ , то на її поверхні:

$$\begin{cases} E'_{1tg} = 0 \\ H'_{1tg} = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

бо вектори  $E'$  та  $H'$  рівні нулю у кожній точці цієї області.

Отже, з виразу (3.34) і (3.35) слідує, що дотичні складові векторів  $E'$  та  $H'$  електромагнітного поля еквівалентних джерел при переході через поверхню  $S$  відчують скачок.

Раніше було показано, що дотична складова вектора  $\mathbf{H}$  має розрив неперервності на граничній поверхні  $S$ , якщо по ній тичуть поверхневі

електричні струми. Величина скачка дотичної складової вектора  $\mathbf{H}$  пов'язана з щільністю поверхневих електричних струмів співвідношенням :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s. \quad (3.38)$$

тут  $\mathbf{n}$  – одиничний вектор нормалі до поверхні  $S$ , направлений у області

Вираз (3.38), як відомо, є наслідком першого рівняння Максвелла у інтегральній формі:

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \frac{dN}{dt}$$

При наявності поверхневих струмів.

Так же само можна показати, що розрив безперервності дотичної складової вектора  $\mathbf{E}$  на поверхні  $S$  зумовлений наявністю поверхневих магнітних струмів. При цьому із другого рівняння Максвелла у інтегральній формі:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -I_M - \frac{d\Phi}{dt}$$

слідуює, що величина скачка  $E_{tg}$  пов'язана з поверхневою щільністю магнітних струмів  $j_{MS}$  співвідношенням

$$-\left[ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \right] = \mathbf{j}_{MS} \quad (3.39)$$

На основі викладеного можна стверджувати, що джерелами електромагнітного поля  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{H}$  є поверхневі електричні та магнітні струми, які течуть по граничній поверхні  $S$ . Так як у розглянутому випадку

$$E_1 = E_2 = 0 \text{ і } H_1 = H_2 = 0,$$

то із виразів (3.38) і (3.39) слідуює, що щільність еквівалентних поверхневих струмів рівна

$$\left. \begin{aligned} j_s &= -(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) = \mathbf{H}_2 \times \mathbf{n} \\ j_{MS} &= -(\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}) = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \text{ на } S. \quad (3.40)$$

Розрахунок електромагнітного поля у зовнішньому просторі зводиться до визначення поля еквівалентних джерел у однорідному середовищі. Так, вектор-потенціали шуканого електромагнітного поля знаходяться із виразу:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\mu}{4\pi} \int_S j_s \frac{e^{-ikR}}{R} dS = \frac{\mu}{4\pi} \int_S (H_2 \times n) \frac{e^{-ikR}}{R} dS, \\ F &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S j_{MS} \frac{e^{-ikR}}{R} dS = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S (n \times E_2) \frac{e^{-ikR}}{R} dS. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Аналогічно, вектори випромінювання **N** і **L** можна розрахувати по формулі:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_S (H_2 \times n) e^{ikr' \cos \varphi} dS = \int_S j_s e^{ikr' \cos \varphi} dS, \\ L &= \int_S (n \times E_2) e^{ikr' \cos \varphi} dS = \int_S j_{MS} e^{ikr' \cos \varphi} dS, \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Показаний метод називається методом ( або принципом ) еквівалентних струмів. Цей метод дозволяє розрахувати електромагнітне поле будь-якої обмеженої в просторі системи джерел, якщо відомі дотичні складові векторів **E** і **H** на деякій замкнутій поверхні *S*, яка охоплює джерела.

Ватро все ж таки мати на увазі, що граничні значення для дотичних складових векторів **E** і **H** не можна вводити незалежно друг від друга, тому що це суперечить теоремі єдиності вирішення рівняння Максвелла. Із теореми єдиності витікає, що заданою на границі області складовою  $E_{tg}$  ( або **H**  $\perp$  ), яка може мати єдине , а не довільне значення.

Тому, вводячи якісь підходящі, але в сутності незалежні друг від друга вирази для дотичних складових векторів **E** і **H** на граничній поверхні і роблячи потім розрахунок поля з допомогою показаного вище метода, ми допускаємо принципову помилку. В результаті виявляється, що знайдене поле може не задовільно поставленим граничним умовам. Однак, якщо приблизні граничні



значення для векторів  $\mathbf{E}$  і  $\mathbf{H}$  достатньо близькі до істинних, подібна помилка виходить малою.

### Випромінювання елемента площини з поверхневими електричними і магнітними полями

Істотний інтерес для практики представляє розрахунок електромагнітного поля поверхневих електричних і магнітних струмів, розподілених відомим чином у межах деякого елемента плоскої поверхні. Справа у тому, що багато реальних антен на основі розглянутого вище принципу еквівалентних струмів можуть бути представлені у вигляді джерел подібного типу.

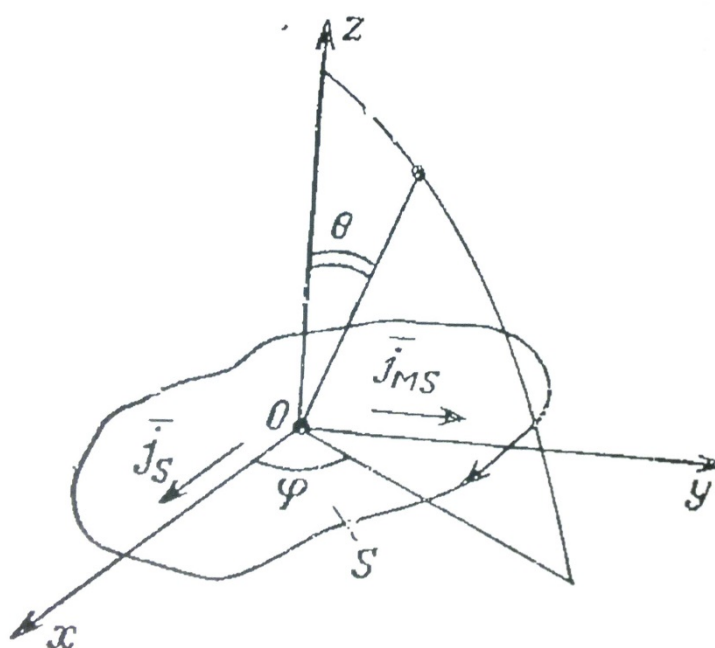


Рис 25. Елемент площини з поверхневими електричними і магнітними струмами

Допустимо, що джерелом поля є елемент  $S$  площини  $z=0$  (рис. 25) з заданими на ній поверхневими електричними і магнітними струмами:

$$\mathbf{j}_s = i_x \mathbf{j}_0(x, y),$$

$$j_{MS}=i_y j_{M0}(x,y).$$

У цьому випадку вектори випромінювання, визначаючи діаграму направленості джерел, будуть мати вид:

$$\left. \begin{aligned} N &= i_x \int_S j_0(x', y') e^{ikr' \cos \varphi} dS \\ L &= i_y \int_S j_{M0}(x', y') e^{ikr' \cos \varphi} dS \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Якщо вважати, що електричні і магнітні струми пов'язані співвідношенням  $j_{M0}=Z_0 j_0$ , то

$$N=i_x N_x, L=i_y Z_0 N_x,$$

причому

$$N_x = \int_S j_0(x', y') e^{ikr' \cos \varphi} dS. \quad (3.44)$$

Розрахуємо проекції векторів випромінювання на напрямлення  $\theta$  і  $\varphi$  сферичній системі координат. При цьому будемо, як завжди, допускати, що кут  $\theta$  відраховується від осі  $z$ , а кут  $\varphi$  - від осі  $x$  (рис.25). Так як проекції любого вектора  $C$  у сферичній системі координат виражаються через його проекції у прямокутних координатах співвідношення

$$\left. \begin{aligned} C_\theta &= (C_x \cos \varphi + C_y \sin \varphi) \cos \theta - C_z \sin \theta \\ C_\varphi &= (-C_x \sin \varphi + C_y \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

то у даному випадку

$$N_\theta = N_x \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi; N_\varphi = -N_x \cdot \sin \varphi;$$

$$L_\theta = L_0 N_x \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi; L_\varphi = Z_0 \cdot N_x \cdot \cos \varphi;$$

Поле у далекій зоні:

$$\left. \begin{aligned} E_\theta &= \frac{-i}{2\lambda} Z_0 N_x \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos \theta) \cos \varphi, \\ E_\varphi &= \frac{i}{2\lambda} Z_0 N_x \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos \theta) \sin \varphi, \\ H_\theta &= \frac{-E_\varphi}{Z_0}, \\ H_\varphi &= \frac{E_\theta}{Z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Допустимо, що елементи площини  $S$  має форму прямокутника з сторонами  $a$  і  $b$  ( рис. 25), а значення струмів у кожній точці поверхні  $S$  незмінні, тобто

$$j_0(x, y) = j_0; j_{M0}(x, y) = j_{M0},$$

причому

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}.$$

У цьому випадку проекція  $\dot{N}_x$  буде рівна

$$\dot{N}_x = j_0 \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ikr' \cos \psi} dx' dy'$$

Розгорнемо вираз  $r' \cos \psi$  та враховуючи відомі співвідношення між сферичними та прямокутними координатами точок джерела

$$r' \sin \theta' \cos \varphi' = x'; \quad r' \sin \theta' \sin \varphi' = y'; \quad r' \cos \theta' = z'.$$

Оскільки в розглянутому випадку  $z' = 0$ , то  $r' \cos \psi = x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi$ .

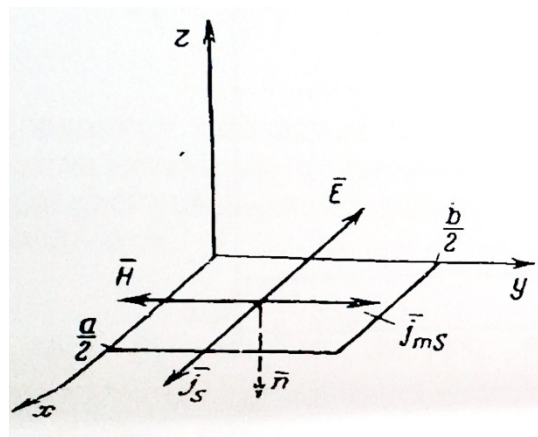


Рис. 26. Прямокутник з поверхневими електричними та магнітними токами.

Отже,

$$\dot{N}_x = j_0 \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ik(x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi)} dx' dy' = i$$

$$j_0 ab \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\varphi\right) \sin\left(\frac{kb}{2} \sin\theta \sin\varphi\right)}{\frac{ka}{2} \sin\theta \cos\varphi \frac{kb}{2} \sin\theta \sin\varphi}$$

Підставивши знайдене значення  $\dot{N}_x$  у (3.46), отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{E}_0 = \frac{-i}{2\lambda} j_0 Z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y} (1 + \cos\theta) \cos\varphi, \\ \dot{E}_\varphi = \frac{i}{2\lambda} j_0 Z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin X}{X} \frac{\sin Y}{Y} (1 + \cos\theta) \sin\varphi, \\ \dot{H}_\theta = \frac{-\dot{E}_\varphi}{Z_0}; \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{E}_\theta}{Z_0}, \end{cases} \quad (3.47)$$

де

$$X = \frac{ka}{2} \sin\theta \cos\varphi; Y = \frac{kb}{2} \sin\theta \sin\varphi; S = ab.$$

Вивчимо електромагнітне поле даного джерела при  $\varphi=0$ , (площина xOz) та  $\varphi=\pi/2$  (площина yOz). З виразів (3.47) випливає, що при  $\varphi=0$  проекція  $E_\varphi=0$ , а

$$\dot{E}_\theta(\theta, 0) = \frac{-i}{2\lambda} j_0 Z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta} (1 + \cos\theta)$$

Аналогічно, при  $\varphi=\pi/2$  проекція  $E_\theta=0$ , а

$$\dot{E}_\varphi\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{2\lambda} j_0 Z_0 S \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin\theta} (1 + \cos\theta).$$

Порівнюючи останні два вирази, можна зробити висновок, що характеристика направленості прямокутного елемента з рівномірним розподілом струмів у головних площинах ( $\varphi=0$  та  $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ) має вигляд

$$E_m(\theta) = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} \sin\theta} (1 + \cos\theta), \quad (3.48)$$

де  $l=a$ , якщо  $\varphi=0$ ,  $l=b$ , якщо  $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ;  $E_0 = \text{const}$ .

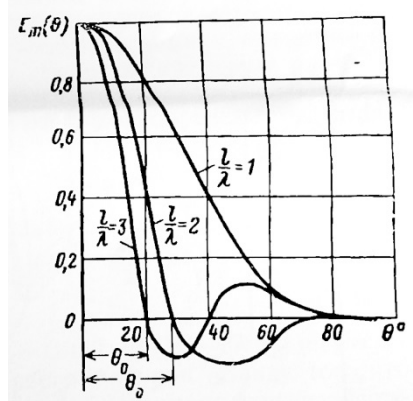


Рис. 27. Діаграми направленості прямокутника з поверхневими електричними та магнітними струмами.

Вигляд діаграми направленості (3.48) суттєво залежить від відношення  $l/\lambda$  (тобто від величини  $a/\lambda$  або  $b/\lambda$ ).

На рис. 27 зображені нормовані криві  $E_m(0)$ , побудовані для різних значень  $l/\lambda$ . З цього малюнка випливає, що при  $\frac{l}{\lambda} > 1$  діаграма спрямованості джерела має великий за величиною головний пелюсток і кілька невеликих бічних пелюсток. Наявність мінімумів і максимумів в діаграмі спрямованості джерела, очевидно, є результат інтерференції полів, створених елементарними ділянками випромінюючої поверхні  $S$ .

У кількісному відношенні ширина головної пелюстки діаграми спрямованості характеризується кутом розчину  $2\theta_0$  (рис. 27), де  $\theta_0$  - мінімальний кут, при якому функція  $E_m(\theta)$  обертається в нуль. З виразу випливає, що  $E_m(\theta_0) = 0$ , якщо

$$\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \sin \theta_0\right) = 0$$

і, отже,

$$\sin(\theta_0) = \lambda/l.$$

Тому величина кута розчину головної пелюстки дорівнює

$$2\theta_0 = 2 \arcsin \lambda/l.$$

Якщо

$$\frac{\lambda}{l} \ll 1, \text{ то } 2\theta_0 \approx 2\lambda/l.$$

Таким чином, зі збільшенням відношення  $l/\lambda$  ширина головної пелюстки діаграми спрямованості зменшується, тобто випромінювання електромагнітних хвиль стає більш спрямованим. Для отримання гостроспрямованого випромінювання необхідно, щоб лінійні розміри джерела значно перевищували довжину хвилі. Цей висновок має важливе значення, бо він визначає принципи побудови спрямованих антен.

Аналогічні розрахунки можна провести і в тому випадку, коли випромінюючий елемент має форму кола з рівномірно розподіленими електричними і магнітними струмами. Якщо радіус кола дорівнює  $a$ , то характеристика спрямованості джерела буде визначатися виразом

$$E_m(\theta) = E'_0 \frac{J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta\right)}{\frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta} (1 + \cos\theta) \quad (3.49)$$

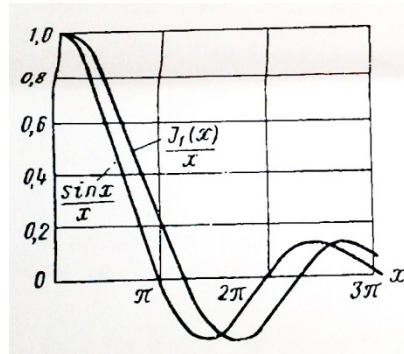


Рис. 28. Функції  $J_1(x)/x$  та  $\sin(x)/x$

де  $E'_0 = \text{const}$ , а  $J_1(x)$  – функція Беселя першого порядку. З огляду на те що функція  $J_1(x)/x$  вельми близька до функції  $\sin(x)/x$  (рис. 28), діаграма спрямованості круглого джерела в головних площинах буде аналогічна діаграмі спрямованості прямокутного джерела. Тому висновки, отримані при дослідженні електромагнітного поля прямокутного елемента  $S$ , якісно застосовні до поля круглого джерела.

Припустимо, що випромінюючий елемент має малі (або в ліміті нескінченно малі) розміри, тобто величина  $S \rightarrow \Delta S \rightarrow 0$ . У цьому

випадку при будь-якій формі елемента  $S$  проекція  $\dot{N}_x$  дорівнюватиме

$$j_0(x', y') e^{ikr' \cos\psi} dS = i j_0 \Delta S.$$

$$\dot{N}_x = \int_{\Delta S} i$$

Підставивши знайдене значення  $\dot{N}_x$  в (2.46), отримаємо вирази для компонент векторів електромагнітного поля елементарного поверхневого джерела в дальній зоні:

$$\begin{cases} \dot{E}_\theta = \frac{-i}{2\lambda} j_0 Z_0 \Delta S \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos\theta) \cos\varphi, \\ \dot{E}_\varphi = \frac{i}{2\lambda} j_0 Z_0 \Delta S \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos\theta) \sin\varphi. \end{cases} \quad (3.50)$$

З виразів випливає, що характеристика спрямованості подібного елементарного джерела, що зазвичай називають *джерелом Гюйгенса*, в головних площинах має вигляд

$$E_m(\theta) = E_0^{\square} (1 + \cos\theta)$$

і, отже, є кардіоїдою (рис.29).

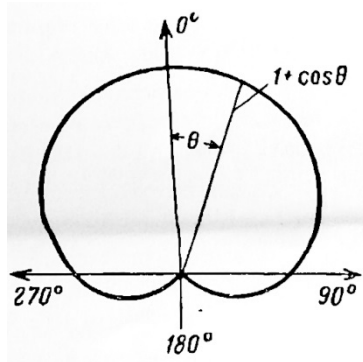


Рис. 29. Діаграма спрямованості джерела Гюйгенса в головних площинах (полярні координати).

Характеристика спрямованості джерела Гюйгенса по потужності визначається виразом

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{Z_0}{8\lambda^2} j_0^2 (dS)^2 (1 + \cos\theta)^2.$$

З виразів випливає, що система поверхневих електричних і магнітних струмів, обумовлених рівностями

$$\vec{j}_s = \begin{cases} \vec{i}_x j_0 n a S \\ 0 \text{ поза } S \end{cases} \text{ и } \vec{j}_{ms} = \begin{cases} \vec{i}_y j_{m0} n a S \\ 0 \text{ поза } S \end{cases} \quad (3.51)$$

в площині  $z=0$ , еквівалентна розподілу векторів електромагнітного поля виду

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{i}_y \dot{H}_y = -\vec{i}_y \dot{j}_0 n a S \\ 0 \text{ вне } S \end{cases}; \vec{E} = \begin{cases} \vec{i}_x \dot{E}_x = -\vec{i}_x \dot{j}_{m0} n a S \\ 0 \text{ вне } S \end{cases}$$

У цьому випадку проекція  $\dot{N}_x$  буде рівною

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{\dot{j}_{m0}}{\dot{j}_0} = Z_0.$$



Останні співвідношення, як відомо, справедливі для складових векторів поля плоскої хвилі. Отже, задачу щодо розрахунку поля плоского елемента  $S_{iz}$  струмами (3.51) ми могли б сформулювати як задачу про випромінювання відповідної ділянки фронту плоскої хвилі.

### Дифракція від смуги і півплощини

Нехай нескінченно-довга, зникаючої товщини смуга обмежена лініями  $y = -a$

$y = -b$  (рис. 15). Напрямок падаючої хвилі лежить в площині  $xOy$  і складає кут  $\alpha$  з віссю  $x$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}.$$

Розглянемо два випадки поляризації падаючої хвилі.

**1 випадок.**  $\vec{E}_0 \parallel \vec{z}^0$  - вектор електричного поля падаючої хвилі паралельний краю смуги.

В даному випадку поле падаючої хвилі можна записати рівняннями ( $e^{-i\omega t}$  опускаємо):

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, E_x = E_y = 0, \\ H_x &= H_0 \sin \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_y &= -H_0 \cos \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, H_z = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Прийmemo, що безпосередньо біля поверхні полоси відбите поле буде таким, як при  $\lambda \rightarrow 0$ , тоді можемо записати:

$$\begin{aligned} E_{z \text{ відб}} &= -E_0 e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_{x \text{ відб}} &= -H_0 \sin \alpha e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_{y \text{ відб}} &= -H_0 \cos \alpha e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad x=0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Виберемо поверхню інтегрування  $S$  так, як показано на рис.30. Частини 3-4 та 6-7 поверхні  $S$  вважатимемо прилягаючими одна до одної; сума інтегралів по цим частинам рівна нулю внаслідок протилежного напрямку їх нормалей.

Доданки, що визначаються на  $S$  падаючою хвилею (3.52), враховувати не будемо, так як після інтегрування вони знову в якості доданків дадуть (3.52). Інтеграл по частині 4-5-6 розглядати не будемо, допускаючи віднести цю частину на нескінченність. Залишається розглянути інтеграли по частинах 1-2, 2-3, 7-1.

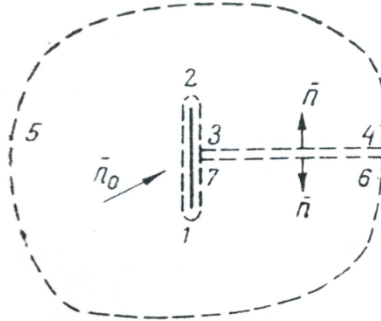


Рис.30 Поверхня інтегрування

На освітленій стороні 1-2 відображене поле записане рівняннями (3.53). Що стосується тіньової сторони 2-3, 7-1, то тут приймемо, що безпосередньо у поверхні екрана наявна повна тінь, що отримується внаслідок того, що на поле (3.52) падаючої хвилі накладається поле, протилежне по знаку, але рівній йому величині, що *випромінюється тіньовою стороною* екрана:

$$\begin{aligned} E_{z \text{ відб}} &= -E_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_{x \text{ відб}} &= -H_0 \sin \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ H_{y \text{ відб}} &= H_0 \cos \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad x=0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Електричне поле (3.53) на частині 1-2 поверхні  $S$  визначить магнітний струм густини:

$$\bar{i}^* = [\bar{E}_{z \text{ відб}} \bar{n}], \quad j^* = j_y^* = E_0 e^{iky \sin \alpha} \quad (3.55)$$

Електричне поле на частини 2-3, 7-1 поверхні  $s$  визначить магнітний струм густини

$$'j^* = ['\bar{E}_{z \text{ відб}} \bar{n}], \quad 'j^* = 'j_y^* = -E_0 e^{iky \sin \alpha} \quad (3.56)$$

Так як товщина полоси зникаючи мала, то дія магнітних струмів (3.55) та (3.56) буде взаємно компенсуватися: сумарний магнітний вектор Герца рівний нулю. Далі, компоненти магнітного поля дадуть:

На освітленій стороні:

$$\bar{j} = [\bar{n} \bar{H}_{y \text{ відб}}]; \quad j = j_z = H_0 \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}; \quad (3.57)$$

На тіньовій стороні:

$$'j = [\bar{n} 'H_{y \text{ відб}}]; \quad 'j = 'j_z = H_0 \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}. \quad (3.58)$$

Таким чином поле, дифраговане від полоси, можна розглядати як поле листка електричного струму с густиною:

$$j = j_z = 2H_0 \cos \alpha e^{iky \sin \alpha}. \quad (3.59)$$

Оскільки електричний вектор Герца буде мати, так само як і струм, тільки компоненту по z, то напишемо по (3.57):

$$Z = Z_z = \frac{i}{4\pi\omega} 2H_0 \cos \alpha \int_{-a}^a e^{ik\eta \sin \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta d\eta,$$

тут

$$r = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2}.$$

Внутрішній інтеграл виражається через функцію Ханкеля нульового порядку і ми приходимо до формули:

$$Z_z = -\frac{H_0 \cos \alpha}{2\omega} \int_{-a}^a e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y - \eta)^2}) d\eta. \quad (3.60)$$

Отриманий інтеграл (3.60) був детально розглянутий в попередньому розділі, тому тут проміжні викладки опускаємо. Так як в даному випадку

$$\text{div} \bar{Z} = \frac{dZ_z}{dZ} = 0, \text{ то:}$$

$$E = E_z = \frac{k^2}{\varepsilon} Z_z = \frac{-k E_0}{2} \cos \alpha \int_{-a}^b e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta \quad (2.61)$$

Припускаючи  $a = b$  і розглядаючи достатньо великі відстані, отримаємо в полярних координатах:

$$E = \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_0 \cos \alpha \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{\sin[ka(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad (3.62)$$

Більш точна формула буде містити інтеграли Френеля.

Припускаючи в (3.60)  $b = 0$  і  $a = \infty$ , отримаємо для випадку напівплощини  $y < 0$

$$E = -\frac{kE_0}{2} \cos \alpha \int_{-a}^{\infty} e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta \quad (3.63)$$

Цей інтеграл також розглядався в попередньому розділі; при малих кутах дифракції ( $y \ll x$ ) він приводиться до формули (при  $a = 0$ )

$$E = E_0 \frac{e^{ikR \cos \varphi}}{2} + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1\left(2\sqrt{\frac{kR}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$F_1(u) = \int_0^u e^{i\frac{\pi t^2}{2}} dt.$$

де

Відмітимо, що внаслідок зробленого вибору поверхні інтегрування  $S$ , формули (2.62) та (2.63) справедливі для будь-якого значення азимута.

**2 випадок.**  $\vec{H} \parallel \vec{z}$  - вектор магнітного поля падаючої хвилі паралельний краю полоси. В цьому випадку поле падаючої хвилі можна записати так:

$$H_z = H_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}; \quad H_x = H_y = 0; \quad (3.64)$$

$$E_x = -E_0 \sin \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)};$$

$$E_y = E_0 \cos \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}; \quad E_z = 0.$$

В освітленої сторони полоси відбите поле визначимо аналогічно першому випадку:

$$\begin{aligned} H_{z\text{відб}} &= H_0 e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ E_{x\text{відб}} &= -E_0 \sin \alpha e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ E_{y\text{відб}} &= -E_0 \cos \alpha e^{ik(-x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad x=0 \quad (3.65) \end{aligned}$$

З тіньової сторони екрану:

$$\begin{aligned} 'H_{z\text{відб}} &= -H_0 e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ 'E_{x\text{відб}} &= E_0 \sin \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}, \\ 'E_{y\text{відб}} &= -E_0 \cos \alpha e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad x=0 \quad (3.66) \end{aligned}$$

Магнітні поля (3.65) та (3.66) дають в сукупності електричний струм густини:

$$j = j_y = 2H_0 e^{iky \sin \alpha}. \quad (3.67)$$

Електричне поле (3.65) визначить магнітний струм густини:

$$\bar{i}^* = [\bar{E}_{\text{відб}} \quad \bar{n}]; \quad j^* = j_z^* = E_0 \cos \alpha e^{iky \sin \alpha} \quad (3.68)$$

Електричне поле визначає магнітний струм густини:

$$'j^* = ['\bar{E}_{\text{відб}} \quad \bar{n}]; \quad 'j^* = j_z^* = -E_0 \cos \alpha e^{iky \sin \alpha} \quad (3.69)$$

Таким чином, як і в першому випадку, магнітні струми компенсуються і магнітний вектор Герца  $\bar{Z}^* = 0$ .

Очевидно, що магнітний вектор Герца завжди буде рівний нулю при дифракції від нескінченно-тонкого екрану (не обов'язково плоского), якщо поле, що випромінюється екраном, визначати саме таким чином, як це було зроблено вище:

на освітленій стороні:

$$\begin{aligned} E_{\text{твідб}} &= -E_{\text{т пад}}, & E_{\text{нвідб}} &= E_{\text{н пад}}, \\ H_{\text{твідб}} &= H_{\text{т пад}}, & H_{\text{нвідб}} &= -H_{\text{н пад}}, \end{aligned}$$

$$\text{на тіньовій стороні: } \bar{E}_{\text{відб}} = -\bar{E}, \quad \bar{H}_{\text{відб}} = -\bar{H},$$

(3.70)

Густина електричного струму визначається при цьому за формулою:

$$\bar{j} = 2 \bar{H}_{\text{пад}} \quad (3.71)$$

В подальших задачах будемо відразу замінювати екран листком електричного струму з густиною, що визначається за формулою (3.71).

Формулу (3.71) можна отримати, не користуючись принципом еквівалентності, а просто виходячи із умови на межі ідеального провідника в припущенні слабкої викривленості його поверхні.

Так як в розглянутому тут випадку струм (3.67) має тільки одну компоненту  $j_y$ , то і вектор Герца має тільки одну компоненту:

$$Z = Z_y = \frac{i}{4\pi\omega} 2H_0 \int_{-a}^a e^{ik\eta \sin \alpha} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} r d\zeta. \quad (3.72)$$

Звідси знаходимо для дифрагованого поля:

$$\begin{aligned}
H = H_z &= \frac{H_0}{2\pi} \int_{-a}^a e^{ik\eta \sin \alpha} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta = \\
&= \frac{i}{2} H_0 \int_{-a}^a e^{ik\eta \sin \alpha} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}) d\eta.
\end{aligned}
\tag{3.73}$$

Для дуже великих відстаней спостереження  $R \gg a$ , при  $a = b$  отримаємо:

$$H = \sqrt{\frac{2}{\pi}} H_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kR}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin[k\alpha(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \cos \varphi;
\tag{3.74}$$

Із формули (3.74), на основі другого рівняння Максвела, отримаємо:

$$\begin{aligned}
E_{\varphi} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kR}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin[k\alpha(\sin \alpha - \sin \varphi)]}{\sin \alpha - \sin \varphi} \cos \varphi; \\
E_R &\ll E_{\varphi}, \quad E_z = 0.
\end{aligned}
\tag{3.75}$$

Формули більш точні, ніж (3.74) та (3.75), будуть містити інтеграли Френеля.

Для випадку півплощини ( $a = \infty$ ,  $b = 0$ ,  $\alpha = 0$ , формула (3.73) дає (при  $y \ll x$ ):

$$H = -H_0 \frac{e^{ikR \cos \varphi}}{2} + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1\left(2\sqrt{\frac{kR}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2}\right)
\tag{3.76}$$

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{e^{ikR \cos \varphi}}{2} + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1\left(2\sqrt{\frac{kR}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi;
\tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
E_R &= E_0 \frac{e^{ikR \cos \varphi}}{2} + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1\left(2\sqrt{\frac{kR}{\pi}} \sin \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi + \\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{kR}} e^{i2kR \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2}
\end{aligned}
\tag{3.78}$$

$$E_z = 0.$$

## Дифракція від циліндра

Розглянемо дифракцію від кругового ідеально-провідячого циліндра необмеженої довжини, вісь котрого співпадає з віссю  $Z$  циліндричної системи координат  $R, \varphi, z$ , а радіус рівний  $a$ . Так само, як і в попередньому параграфі, розглянемо два випадки поляризації падаючої хвилі, напрямком приходу якої буде вважатися нормальним до осі  $Z$ .

**1 випадок.**  $\vec{E} \parallel \vec{z}^0$ . Після падаючої хвилі запишемо рівняннями:

$$\begin{aligned} E_z &= E_0 e^{-ikR \cos \varphi}; & E_R &= E_\varphi = 0; \\ H_R &= H_0 \sin \varphi e^{-ikR \cos \varphi}; \\ H_\varphi &= H_0 \cos \varphi e^{-ikR \cos \varphi}; & H_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Густина електричного струму на освітленій стороні циліндра

$$j = j_z = 2 H_\varphi = 2 H_0 \cos \varphi e^{-ikR \cos \varphi} \quad (3.80)$$

Електричний вектор Герца:

$$\begin{aligned} j_z \frac{e^{ikr}}{r} dS &= \frac{2iH_0}{4\pi\omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \varphi_1 e^{-ikR \cos \varphi_1} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi = i \\ Z &= Z_z = \frac{i}{4\pi\omega} \int_S i \\ &= \frac{-aH_0}{2\omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi_1 e^{-ikR \cos \varphi_1} H_0^{(1)}(k\rho) d\varphi_1, \end{aligned} \quad (3.81)$$

де  $\rho = R \sin \alpha \cos(\varphi_1 - \varphi)$ . Припускаючи  $k\rho \gg 1$ , на підставі асимптотичного представлення функції Ханкеля, отримаємо:

$$Z = -\frac{aH_0}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} e^{i\frac{\pi}{4}} \cos \varphi_1 e^{-ik\alpha[\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)]} d\varphi_1, \quad (3.82)$$

$$\text{div} \vec{Z} = \frac{dZ_z}{dZ} = 0$$

В даному випадку



$$E = E_z = \frac{k^2}{\varepsilon} Z_z = -\frac{kE_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2k\alpha \cos \frac{\varphi}{2} \cos(\varphi_1 - \frac{\varphi}{2})} \cos \varphi_1 d\varphi_1$$

(3.83)

Зробимо підстановку  $\varphi_1 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} = \beta$ ,  $d\varphi_1 = d\beta$ , тоді отримаємо:

$$E = -\frac{kE_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \alpha \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\sin(\rho \sin \frac{\varphi}{2})}{\rho} + \cos \frac{\varphi}{2} I(\rho, \varphi) d\beta,$$

(3.84)

$$\rho = 2ka \cos \frac{\varphi}{2}, \quad I(\rho, \varphi) = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} e^{-i\rho \sin \beta} \sin \beta d\beta$$

де:

(3.85)

Інтеграл (3.85) був розглянутий нами в попередньому розділі; він представляється у вигляді ряду по циліндричним функціям.

При  $\rho \gg 1$

$$I(\rho, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \pi e^{-i(\rho - \frac{\pi}{4})};$$

(3.86)

$$\begin{aligned} E &= -\frac{kE_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} \alpha \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\sin(ka \sin \frac{\varphi}{2})}{ka \cos \frac{\varphi}{2}} + \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k\alpha \cos \frac{\varphi}{2}}} e^{-i2k\alpha \cos \frac{\varphi}{2}} d\beta \\ &= -E_0 \sqrt{\frac{a}{2R}} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{ikR} e^{-i2ka \cos \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

(3.87)

Формула (3.87) співпадає з точністю до амплітудного множника  $E_0$  з формулою (3.84), отриманою методом Кірхгофа.

Розглянемо два окремих випадки. При  $\varphi = 0$  з (2.84) отримаємо:

$$E = -E_0 \frac{e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi kR}} ka [2 - \pi H_1(2ka) - i\pi J_1(2ka)], \quad (3.88),$$

де,  $J_1$  - циліндрична функція першого порядку.

$H_1$  - функція Струве першого порядку.

Метод Кірхгофа дає формулу, що співпадає з формулою (3.84).

При  $\varphi \neq \pi$ :  $\rho \ll 1$ ,  $I(p, \varphi) \approx 2 \cos \frac{\varphi}{2} e^{-i\pi k \alpha}$ ; формула (2.84) дає при цьому:

$$E = -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}} k \alpha e^{-i\pi k \alpha \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Звідки при  $\varphi = \pi$ , маємо:

$$E = -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}} k \alpha; \quad (3.85)$$

По методу Кірхгофа – при  $\varphi = \pi$  функція  $\psi \neq 0$ .

## 2 випадок

$\vec{H}_0 \parallel \vec{z}^0$ . Поле падаючої хвилі запишемо рівняннями:

$$\begin{aligned} E_R &= -E_0 \sin \varphi e^{-ikR \cos \varphi}, \\ E_\varphi &= -E_0 \cos \varphi e^{-ikR \cos \varphi}, & E_z &= 0 \\ H_z &= H_0 e^{-ikR \cos \varphi}, & H_R &= H_\varphi. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Густина електричного струму на освітленій стороні циліндра:

$$j = j_\varphi = -2H_0 e^{-ik\alpha \cos \varphi}.$$

Електричний вектор Герца буде мати два компоненти:

$$\begin{aligned}
\bar{Z} &= \frac{i}{4\pi\omega} \oint_S \frac{e^{ikr}}{r} dS = \\
&= -\frac{iH_0}{2\pi\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{R}_0 \sin(\varphi_1 - \varphi) + \bar{\varphi}^0 \cos(\varphi_1 - \varphi) e^{-ik\alpha \cos \varphi_1} \alpha d\varphi_1 \frac{e^{ikr}}{r} d\zeta = \\
&= \frac{iH_0\alpha}{2\omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{R}_0 \sin(\varphi_1 - \varphi) + \bar{\varphi}^0 \cos(\varphi_1 - \varphi) e^{-ik\alpha \cos \varphi_1} H_0^{(1)}(k\rho) d\varphi_1,
\end{aligned}
\tag{3.87}$$

де  $\bar{R}_0$ ,  $\bar{\varphi}^0$  - одиничні вектори,  $\rho = R - \alpha \cos(\varphi_1 - \varphi)$ .

Припускаючи  $k\rho \gg 1$ , і замінюючи функцію Ханкеля, отримаємо:

$$Z = -\frac{iH_0\alpha}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{R}_0 \sin(\varphi_1 - \varphi) + \bar{\varphi}^0 \cos(\varphi_1 - \varphi) e^{-ik\alpha [\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)]} d\varphi_1,
\tag{3.88}$$

Так як  $\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0$ , то магнітне поле

$$H = H_z = -\frac{i\omega}{R} \frac{\partial (RZ)}{\partial \varphi} - \frac{\partial Z}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} - i\omega \frac{\partial Z}{\partial \varphi}
\tag{3.89}$$

Підставляючи (3.88) в (3.89), отримаємо:

$$H = H_0 \frac{ik\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi_1 - \varphi) e^{-ik\alpha [\cos \varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)]} d\varphi_1,
\tag{3.90}$$

або, в іншій формі

$$\begin{aligned}
 H &= -H_0 \frac{ik\alpha}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\pi-\varphi}{2}} e^{-i2k\alpha \cos \frac{\varphi}{2} \sin \beta} \sin(\beta - \frac{\varphi}{2}) d\beta = \\
 &= -H_0 \frac{ik\alpha}{\sqrt{2\pi kR}} e^{ikR} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[ 2 \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\sin(p \sin \frac{\varphi}{2})}{p} + \cos \frac{\varphi}{2} (p_1 \varphi) \right] \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

Тут позначення такі самі, що і в формулі (3.84).

При  $\rho \gg 1$

$$H = -iH_0 \sqrt{\frac{\alpha}{2R}} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{ikR} e^{-i2k\alpha \cos \frac{\varphi}{2}} \quad (3.92)$$

І, відповідно до другого рівняння Максвелла:

$$E = E_\varphi = iE_0 \sqrt{\frac{\alpha}{2R}} \sqrt{\cos \frac{\varphi}{2}} e^{ikR} e^{-i2k\alpha \cos \frac{\varphi}{2}} \quad (3.93)$$

Таким чином, порівнюючи (3.92) та (3.93), робимо висновок, що при

достатньо великому радіусі циліндра, точніше при  $2k\alpha \cos \frac{\varphi}{2} \gg 1$ , інтенсивність відбитого поля не залежить від поляризації падаючого поля.

При  $\varphi = 0$  формула (3.91) переходить в формулу (3.83). При  $\varphi \ll \pi$ ,  $\rho \ll 1$ , із (3.91) отримаємо:

$$H \approx -iH_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}} k\alpha \cos \varphi, \quad (3.94)$$

$$E = E_\varphi \approx iE_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} e^{-i\frac{\pi}{4}} k\alpha \cos \varphi. \quad (3.95)$$

Формула (3.95) відрізняється від формули (3.84) множителем  $\cos \varphi$  і при  $\varphi = \pi$  дає ту ж величину поля.

#### 4. МЕТОД КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ. ДИФРАКЦІЯ ВІД ЦИЛІНДРА

##### 4.1. СТРОГЕ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ ВІД КРУГОВОГО ЦИЛІНДРА МЕТОДОМ КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ

Розглянемо рішення задачі дифракції від кругового циліндра необмеженої довжини радіуса  $a$  методом криволінійних координат. Його сутність полягає в тому, що рішення будь-якої задачі проводиться в системі криволінійних (зазвичай ортогональних) координат, обраної таким чином, щоб поверхні розділу збігалися з деякими координатними поверхнями. При цьому запис граничних умов спрощується так, що рішення поставленої задачі полегшується найістотнішим чином. Метод криволінійних координат найбільш ефективний у тих випадках, коли поверхні розділу мають просту форму. У нашому випадку слід застосувати, очевидно, систему циліндричних координат  $r, \varphi, z$ .

Вирази для поля дифрагрованої хвилі повинні:

а) задовольняти рівнянням Максвелла:

$$\operatorname{rot} \dot{H} = -i\omega \epsilon \dot{E}; \operatorname{rot} \dot{E} = i\omega \mu \dot{H},$$

або векторним хвильовим рівнянням, які випливають з рівнянь Максвелла:

$$\nabla^2 \dot{E} + k^2 \dot{E} = 0; \nabla^2 \dot{H} + k^2 \dot{H} = 0$$

б) задовольняти граничним умовам:

$$[\vec{n}(\dot{E}_1 - \dot{E}_2)] = 0; [\vec{n}(\dot{H}_1 - \dot{H}_2)] = 0,$$

де індексом 1 позначено поле зовні циліндра, індексом 2-поле всередині циліндра:

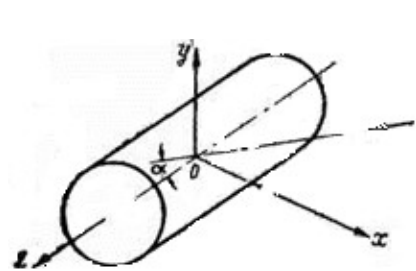
в) на нескінченності мати характер зникаючих хвиль (принцип випромінювання).

Обмежуємося випадком циліндра ідеальної провідності  $g = \infty$ ; в цьому випадку поле в середині циліндра  $E_2 = H_2 = 0$  і перша гранична умова прийме

Рис.31. Система вигляд

$$\text{координат } [\dot{n} \dot{E}_1] = [\dot{n} (\dot{E}_{nad} + \dot{E}_{omp})] \Big|_{r=a} = 0 \quad (4.1)$$

Так як при ідеальній провідності на поверхні циліндра є поверхневий струм з густиною  $j$ , то друга гранична умова приймає вигляд



$$[\dot{n} \dot{H}] = [n (\dot{H}_{nad} + \dot{H}_{omp})] \Big|_{r=a} = j. \quad (4.2)$$

При ідеальній провідності для отримання однозначного рішення задачі достатньо однієї граничної умови (4. 1); рівняння (4. 2) служить для

знаходження щільності поверхневого струму. Виберемо систему координат таким чином (рис.31). вісь  $z$  сумісний з віссю циліндра, а вісь  $x$  виберемо так, щоб напрямок приходупадаючої хвилі  $s$  лежал в площині  $xoz$ . Вектор електричного  $E$  поля падаючої хвилі може бути орієнтований в площині фронту хвилі довільним чином, тому розкладемо його на дві компоненти-паралельну і перпендикулярну осі  $y$

$$\dot{E} = E_y \dot{j} + (E_x \dot{i} + E_z \dot{k}). \quad (4.3)$$

Відповідно магнітне поле  $H$  буде представлено

$$\dot{H} = (H_x \dot{i} + H_z \dot{k}) + H_y \dot{j}. \quad (4.4)$$

Очевидно, що замість загального випадку можна розглянути два окремих:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= E_y \dot{j}, & (4.5) & \dot{E} = E_x \dot{i} + E_z \dot{k}, \\ \dot{H} &= H_x \dot{j} + H_z \dot{k}, & \dot{H} &= H_y \dot{j}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

У першому випадку вектор електричного поля перпендикулярний осі  $z$ , у другому випадку перпендикулярний осі  $z$

вектор магнітного поля. Далі будуть називатись "випадок  $\dot{E}_\perp$ " та "випадок  $\dot{H}_\perp$ "; в першому випадку  $E_z=0$ , у другому випадку  $H_z=0$ .

Будемо вирішувати векторне рівняння

$$\nabla^2 \dot{E} + k^2 \dot{E} = 0, (4.7)$$

еквівалентне трьома скалярним рівнянням:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} + k^2 E_r = \frac{1}{r^2} E_r + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}, (4.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + k^2 E_\varphi = \frac{1}{r^2} E_\varphi - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}, (4.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 (4.10)$$

Рівняння (III. 8) і (III. 9) входять відразу два компоненти поля, що ускладнює їхнє рішення, тому будемо спочатку шукати рішення рівняння (4. 10).

Уявімо  $E_z$  у вигляді добутку трьох функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї координати

$$E_z = R(r) \Phi(\varphi) Z(z). (4.11)$$

Підставляючи (4. 11) в (4. 10), одержимо для функцій  $R(r)$ ,  $\Phi(\varphi)$  і

$Z(z)$  звичайні диференціальні рівняння, рішенням яких є функції:

$$Z(z) = C_1 e^{ixz} + C_2 e^{-ixz}, (4.12)$$

$$\Phi(\varphi) = C_3 e^{in\varphi} + C_4 e^{-in\varphi}. (4.13)$$

$$R(r) = C_5 H_n^{(1)}(k_k r) + C_6 H_n^{(2)}(k_k r). (4.14)$$

де

$$k_k = \sqrt{k^2 - x^2}. (4.15)$$

Число  $n$  потрібно вважати цілим щоб уникнути неоднозначності рішення по координаті  $\varphi$ .

Підставивши знайдені вирази для  $Z$ ,  $\Phi$ ,  $R$  в (4. 11) отримаємо

$$E_z = (C_1 e^{ixz} + C_2 e^{-ixz}) (C_3 e^{in\varphi} + C_4 e^{-in\varphi}) [C_5 H_n^{(1)}(k_k r) + C_6 H_n^{(2)}(k_k r)]. (4.16)$$

Так як залежність від часу прийнята у формі  $e^{-i\omega t}$  то для задоволення принципу випромінювання необхідно прийняти  $C_6=0$ .

Враховуючи властивість функції Ханкеля  $H_{-n}^{(1)}(x) = (-1)^n H_n^{(2)}(x)$ , запишемо повне рішення рівняння (4. 10) у вигляді суми

$$E_z = (C_1 e^{ixz} + C_2 e^{-ixz}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi} H_n^{(1)}(k_k r). \quad (4.17)$$

Якщо напрямок  $\hat{S}$  приходу падаючої хвилі становить кут  $\alpha$  з напрямком осі  $\hat{z}$  (рис. 31), то залежність компонент поля падаючої хвилі від координати  $z$  визначатиметься множителем  $e^{ikz \cos \alpha}$ .

Так як граничні умови (4.1) для компонент вектора  $E$  не залежать від координати  $z$ , то отримаємо однозначно:

$$C_2 = 0; \chi = k \cos \alpha, \quad (4.18)$$

$$k_k = k \sin \alpha. \quad (4.19)$$

Замість (4.17) можемо тепер написати

$$E_z = E_0 e^{ikz \cos \alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k_k r) e^{in\varphi}. \quad (4.20)$$

Рішення (4.20) має вигляд ряду Фур'є, що видається природним через очевидну необхідність періодичній залежності від  $\varphi$ . Це зауваження має силу і для інших компонент поля, тому будемо приймати далі залежність від  $\varphi$  відразу у вигляді  $e^{in\varphi}$ .

Покладемо:

$$E_r = R_r Z_r e^{in\varphi}. \quad (4.21)$$

$$E_\varphi = R_\varphi Z_\varphi e^{in\varphi}. \quad (4.22)$$

Підставляючи (4.21) і (4.22) в рівняння (4.8) і (4.9) і скорочуючи на  $e^{in\varphi}$ , за допомогою нескладних викладень знаходимо:

$$\frac{\{Z_r\} \text{ over } \{Z\} \text{ rsub } \{r\} = \{\text{const}\} \text{ rsub } \{1\}; \quad \{\{Z\} \text{ rsub } \{\varphi\} \text{ rsub } \{1\}\}}{Z_\varphi} = \text{const}_2,$$

отримаємо для  $Z_r$  і  $Z_\varphi$  рівняння, вирішення яких буде



$$Z_r = Z_\varphi = e^{i\chi_Z}. \quad (4.23)$$

Так як при  $\chi=0$  функції  $Z_r=Z_\varphi=1$ , то в якості повного рішення запишемо

$$E_r = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n B_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{kr} e^{in\varphi}. \quad (4.30)$$

З рівняння дивергенції (при  $\chi = 0$ )

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{i}{r} E_\varphi = 0 \quad (4.31)$$

Та формули (4.30) впливає

$$E_\varphi = i E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{d H_n^{(1)}}{d(kr)} e^{in\varphi}. \quad (4.32)$$

Таким чином знайшовши спільні рішення векторного хвильового рівняння для всіх трьох компонент електричного поля при  $\chi=0$ . Для знаходження магнітного поля можна, застосувати рівняння Максвелла

$$i\omega\mu \dot{H} = \text{rot } \dot{E}. \quad (4.33)$$

Розглянемо окремо випадок  $\dot{H}_\perp$  та випадок  $\dot{E}_\perp$ .

*a) Випадок  $H_\perp$*

Поле падаючої хвилі визначається виразами:

$$\begin{aligned} E_x = E_y = 0, \quad H_x = H_z = 0, \\ E_z = E_0 e^{-ikx}, \quad H_y = H_0 e^{-ikx} \end{aligned} \quad (4.34)$$

або в циліндричних координатах:

$$\begin{aligned} E_r = E_\varphi = 0, \quad H_r = H_0 \sin \varphi e^{-ikr \cos \varphi} \\ E_z = E_0 e^{-ikr \cos \varphi}, \quad H_\varphi = H_0 \cos \varphi e^{-ikr \cos \varphi}, \quad H_z = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Застосовуючи граничну умову

$$E_{t_{\text{пад}}} + E_{t_{\text{отр}}} = 0, \quad (4.36)$$

Знаходимо для компонент дифрагованого поля

$$E_\varphi = i E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{d H_n^{(1)}(ka)}{d(ka)} e^{in\varphi} = 0; \quad (4.37)$$

Звідки впливає  $B_n = 0$ . Тепер (4.30) в (4.33) дають:

$$E_r = 0; \quad H_z = 0. \quad (4.38)$$

Таким чином в поле відбитої хвилі компоненти  $E_r$ ,  $E_\varphi$  та  $H_z$  відсутні також, як і в полі падаючої хвилі. Для компоненти  $E_z$  (застосовуючи граничну умову) отримуємо рівняння

$$E_0 e^{-ika \cos \varphi} + E_0 \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(ka) e^{in\varphi} = 0. \quad (4.39)$$

Тут залишаються невідомими коефіцієнти  $A_n$ . Застосовуючи відому в теорії циліндричних функцій формулу

$$e^{ika \cos \varphi} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(ka) e^{in\varphi}, \quad (4.40)$$

знаходимо:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left[ (-i)^n J_n(ka) + A_n H_n^{(1)}(ka) \right] e^{in\varphi} = 0. \quad (4.41)$$

$$A_n = -(-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)}. \quad (4.42)$$

Коефіцієнти  $A_n$  визначилися відразу завдяки тому, що вираз у фігурних дужках (4.41) містить тільки постійні величини, що стало наслідком раціонального вибору системи координат; в даному випадку поверхня циліндру просто збігається з координатної поверхнею  $r=a$ . У цьому визначенні коефіцієнтів ряду полягає перевага методу

Криволінійних координат. Які труднощі виникають при вирішенні задачі в невідповідній системі координат, буде показано далі.

Підставляючи (4.42) в (4.20), знаходимо:

$$E_z = -E_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}. \quad (4.43)$$

Враховуючи співвідношення для порожнечі  $\omega\mu = 120\pi k$ ,  $E_0 = 120\pi H_0$ , з (4.33) та (4.43) знаходимо:

$$H_r = -H_0 \frac{1}{kr} \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} (kr) e^{in\varphi}; \quad (4.44)$$

$$H_\varphi = -iH_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \frac{d H_n^{(1)}(kr)}{d(kr)} e^{in\varphi}; \quad (4.45)$$

Відзначимо аналогію в побудові формул (4. 44), (4. 45) і (4. 30),

(4. 32).

Обчислимо щільність току на поверхні циліндра, користуючись рівнянням (4. 2). Так як  $H_z=0$ , то вектор  $\vec{j}$  матиме компоненту тільки по осі  $z$ .

$$j = j_z = H_\varphi = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A}{\partial r}$$

$$\frac{1}{\mu_0} H_0 \left| \cos \varphi e^{-ika \cos \varphi} - i \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \frac{dH_n^{(1)}(ka)}{d(ka)} e^{ik\varphi} \right| \quad (4.46)$$

Розрахунок за знайденими формулами проведемо далі.

б) Випадок  $E_\perp$

Поле падаючої хвилі визначається виразом:

$$E_x = E_z = 0, \quad H_x = H_y = 0$$

$$E_y = E_0 e^{-ikx}, \quad H_z = H_0 e^{-ikx}, \quad (4.47)$$

або в циліндричних координатах:

$$E_r = E_0 \sin \varphi e^{-ikr \cos \varphi}, H_r = H_\varphi = 0$$

$$E_\varphi = E_0 \cos \varphi e^{-ikr \cos \varphi}, H_z = H_0 e^{-ikr \cos \varphi}$$

$$E_z = 0, \quad (4.48)$$

Застосовуючи граничну умову (4.36) і (4.20) знаходимо для компонент дифрагованого поля:

$$E_z = 0; H_r = H_\varphi = 0 \quad (4.49)$$

-випливає з (4.33). Таким чином в поле відбитої хвилі компоненти  $E_z$ ,  $H_r$ ,  $H_\varphi$  відсутні так само, як і в полі падаючої хвилі.

Застосовуючи граничну умову до компоненти  $E_\varphi$ , знаходимо з (4.48) і (4.32)

$$E_0 \cos \varphi e^{-ika \cos \varphi} + i E_0 \sum_{-\infty}^{\infty} B_n \frac{dH_n^{(1)}(ka)}{d(ka)} e^{in\varphi} = 0 \quad (4.50)$$

З формули (III.40) можемо отримати таку формулу

$$\cos \varphi e^{-ika \cos \varphi} = i \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{dJ_n^{(1)}(ka)}{d(ka)} e^{in\varphi}, \quad (4.51)$$

яка спільно з (III.50) дає змогу отримати

$$B_n = -(-i)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \quad (4.52)$$

Підставляючи (4.52) в (4.32) і (4.30) знаходимо:

$$E_r = -E_0 \frac{1}{kr} \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{i\varphi} \quad (4.53)$$

$$E_\varphi = -i E_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)'}(kr) e^{i\varphi} \quad (4.54)$$

Підставляючи (4.53) і (4.54) у третє рівняння (III.33) знаходимо

$$H_z = H_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{i\varphi} \quad (4.55)$$

Нарешті, застосовуючи другу граничну умову (4.2), знаходимо щільність струму на поверхні циліндра. Так як  $H_\varphi=0$ , то вектор  $\vec{j}$  матиме компоненту тільки по  $\varphi$

$$\vec{j} = j_\varphi = H_z = H_0 \left\{ e^{-ika \cos \varphi} + \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(ka) e^{i\varphi} \right\} \quad (4.56)$$

Штрихи при циліндричних функціях у формулах (4.52-4.56) позначають похідну по всьому аргументу.

#### 4.2. Кількісні обчислення за точними формулами

Покладемо, що точка спостереження знаходиться на досить великій відстані від циліндра ( $kr \gg 1$ ), так що можна застосувати асимптотичні формули:

$$H_n^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} (-i)^n \quad (4.57)$$

$$\frac{d H_n^{(1)}(kr)}{d(kr)} \approx i \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} (-i)^n \quad (4.58)$$

Тоді знайдені раніше формули приймуть такий вигляд:

випадок  $H_\perp$

$$E_z = -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n^\square(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} e^{i\varphi} \quad (4.59)$$

$$H_\varphi = H_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - \pi/4)} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n^\square(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} e^{i\varphi} \quad (4.60)$$

випадок  $E_{\perp}$

$$E_y = E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i(kr - \pi/4)} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} e^{i\varphi} \quad (4.61)$$

$$H_z = H_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i(kr - \pi/4)} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n^{\square}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} e^{i\varphi} \quad (4.62)$$

Вираз для  $E$  і  $H$  в загальних випадках однакові, що є характерним для поля на великій відстані від джерела. Радикальними компонентами поля на великій відстані можна знехтувати, що показує множник  $1 / kr$

Позначимо для краткості обозначення функції, яка визначається сумами (4.59) і (4.60) через  $F_H(ka, \varphi)$  і  $F_E(ka, \varphi)$ :

$$F_H(ka, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J_n^{\square}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} e^{i\varphi} \quad (4.63)$$

$$F_E(ka, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} e^{i\varphi} \quad (4.64)$$

Хоча вирази (4.63) і (4.64) є на вигляд простими, обчислити їх величину досить важко.

Обчислили функції  $F_H$  і  $F_E$  для ряду значень  $ka$ , що лежать в інтервалі  $ka = 0-8$ , користуючись п'ятизначними таблицями циліндричних функцій. Таблиці обчислень займають кілька десятків сторінок і тому їх не наводимо. Результати обчислень представлені тут у вигляді графіків, до обговорення яких і перейдемо.

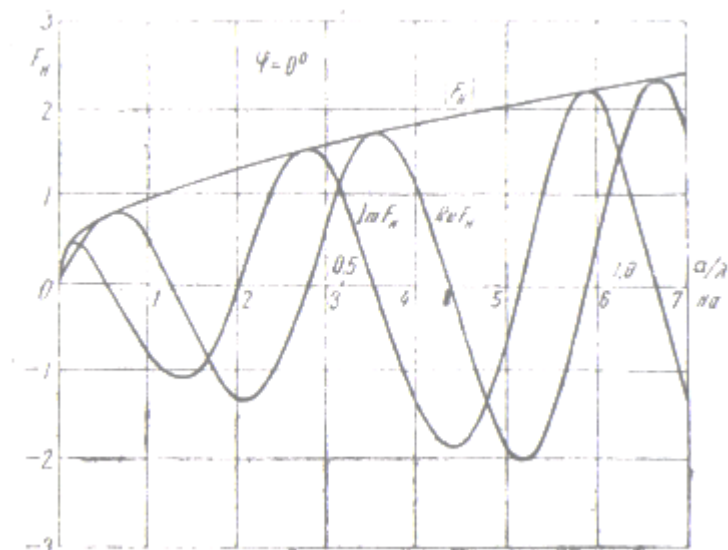


Рис.32 Графік модуля функції  $F_H$  при  $\varphi=0$

На рисунку 32 показаний графік модуля функції  $F_H$  при  $\varphi=0^\circ$

Криві дають дійсну та уявну частину  $F_H(ka, 0)$ . Як видно з графіка,  $|F_H|$  монотонно зростає зі збільшенням  $ka$ . При  $ka < 0.05$

$$|F_n(ka, 0)| \approx \Im F_n \approx -\frac{J_0(ka) N_0(ka)}{J_0^2(ka) + N_0^2(ka)} \approx -\frac{2}{\pi} \left[ \ln \frac{ka}{2} + C \right]^{-1} \quad (4.65)$$

Де  $C=0,577215,,,$

При  $ka \gg 1$   $|F_H|$  зростає як  $\sqrt{ka}$

На рисунку 33 показаний графік модуля функції  $F_H$  при  $\varphi = 180^\circ$ , що відповідає області тіні.

Тут також  $|F_H|$  монотонно зростає зі збільшенням  $ka$ . При  $ka < 0.05$

$$|F_n(ka, \pi)| \approx \Im F_n \approx -\frac{2}{\pi} \left[ \ln \frac{ka}{2} + C \right]^{-1} \quad (4.66)$$

При  $ka \gg 1$  модуль функції  $|F_H|$  апроксимується прямою.

З формули (4.59) слідує

$$|E| = \frac{E_0}{\sqrt{kr}} \sqrt{\frac{2}{\pi} |F_H|} \quad (4.67)$$

Вважаючи, що величина  $ka$  не змінюється за рахунок зміни радіуса циліндра  $a$ , отримаємо з формули (4.67) пропорційну залежність між  $|F_H|$  та  $|E|$ . Інакше кажучи, розглянуті графіки дають в деякому масштабі залежність величини дифрагированого поля від радіуса циліндра, точніше-від відношення  $a/\lambda$  при

$\lambda = \text{const}$ . Значення  $a/\lambda$  показані вище осі абсцис. Однак величина  $ka$  може змінюватися за рахунок зміни  $k$  при  $a = \text{const}$ .

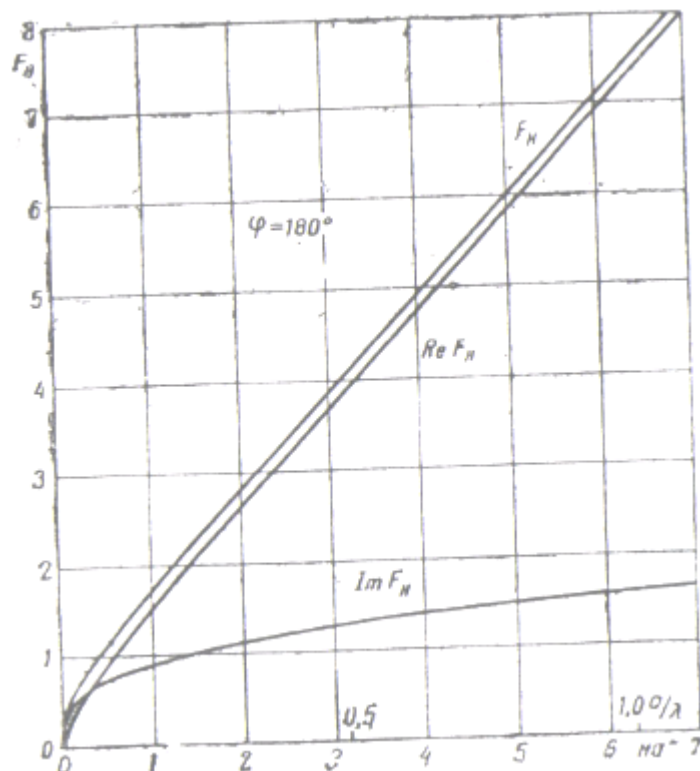


Рис.33.Графік модуля функції  $F_H$  при  $\varphi=180$

Для цього випадку представимо формулу (4.67) у вигляді

$$|E|=E_0 \sqrt{\frac{a}{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|F_H|}{\sqrt{ka}}, \quad (4.68)$$

звідки випливає, що величина дифрагованого поля пропорційна величині  $(ka)^{-1/3}|F_H|$ . На рисунку 34 і 35 дані графіки  $(ka)^{-1/3}|F_H|$  для напрямлення  $\varphi=0^\circ$  та  $\varphi=180^\circ$ , вони показують величину дифрагованого поля у функції від довжини хвилі  $\lambda$  точніше від відношення  $a/\lambda$  при  $a = \text{const}$ .

При  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $ka \rightarrow \infty$  таким чином і криві йдуть у нескінченність. Звідси, звичайно, не випливає, що дифраговане поле зростає необмежено при  $\lambda \rightarrow \infty$ , так як при цьому  $kr \rightarrow 0$  і формули (4.57) і (4.58) застосовувати не можна. Звертаючись до точної формули (4.47), знаходимо при  $k \rightarrow 0$

$$E \approx -E_0 \frac{J_0(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} H_0^{(1)}(kr) \approx -E_0 \frac{\ln \frac{kr}{2}}{\ln \frac{ka}{2}} \rightarrow -E_0. \quad (4.69)$$

Криві (рис. 34) і (рис. 35) справедливі тільки до тих пір, поки виконуються умови  $kr \gg 1$ .

При  $ka \rightarrow \infty$ , тобто при  $\lambda \rightarrow 0$ , крива  $|F_H| \sqrt{\frac{a}{ka}}$  при  $\varphi=0^\circ$  наближається до значення

$\sqrt{\pi}/2$ , яке можна визначити методами геометричної оптики. При  $\varphi=180^\circ$  крива (рис.35) зростає як  $\sqrt{ka}$ . Докладніше порівняння з результатами, отриманими за допомогою наближених методів, буде проведено далі.

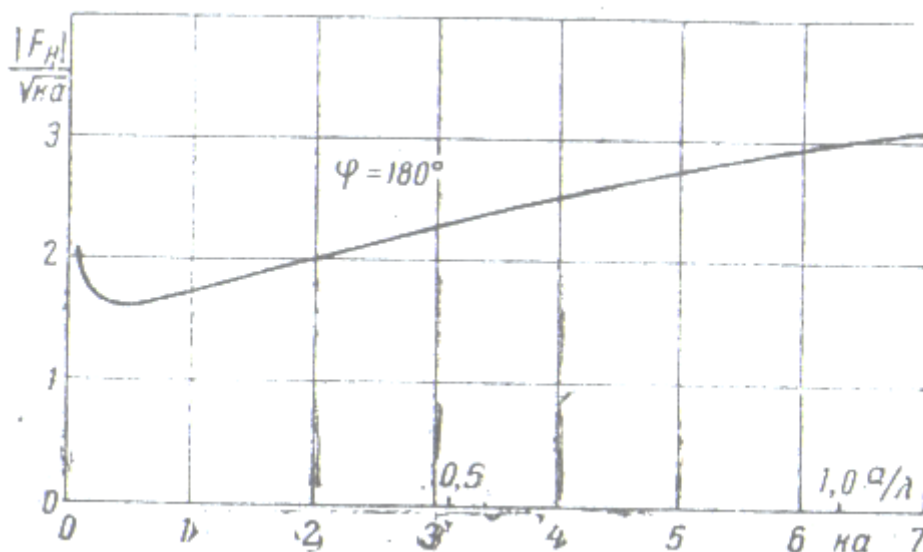


Рис.34 Графік  $\frac{|F_H|}{\sqrt{ka}}$  от  $\frac{a}{\lambda}$  для  $\varphi=180$



Вище простежили вплив  $ka$  на величину дифрагованого поля для двох напрямків  $\varphi=180^\circ$  і  $\varphi=0^\circ$ . Вважатимемо тепер  $ka=\text{const}$  і  $\varphi=\text{var}$ . На рисунку 36 дано криві в функції від величини  $\varphi$ , приведені до одиниці при  $\varphi=0^\circ$ . Їх можна трактувати як "діаграми спрямованості" циліндра, збуджуваного нормально падаючої плоскої хвилею, коли електричне поле паралельно осі циліндра (випадок  $H_{\perp}$ )

Пунктиром нанесена гранична крива, отримана методом геометричної оптики. Криві показують, як поступово змінюється форма «діаграми спрямованості» при збільшенні  $ka$ .

При  $ka < 0.1$  можна вважати, що величина дифрагованого поля не залежить від  $\varphi$ . При збільшенні  $ka$  у проміжку  $(0,1 \dots 1,5)$  на діаграмі з'являється пелюсток з максимумом при  $\varphi=180^\circ$ . На рис.37 приведені ті же криві у полярних координатах.

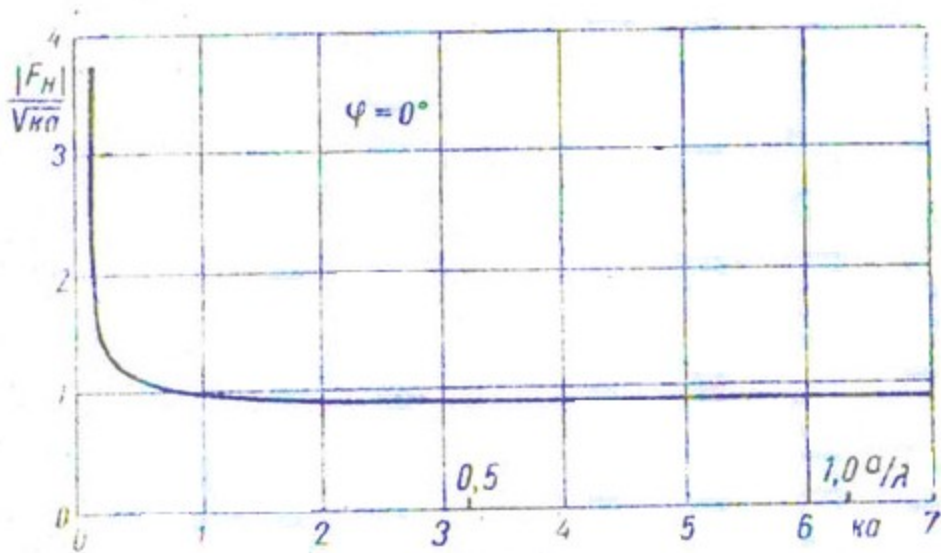


Рис.35 Графік  $\frac{|F_H|}{\sqrt{ka}}$  от  $\frac{a}{\lambda}$  для  $\varphi=0$

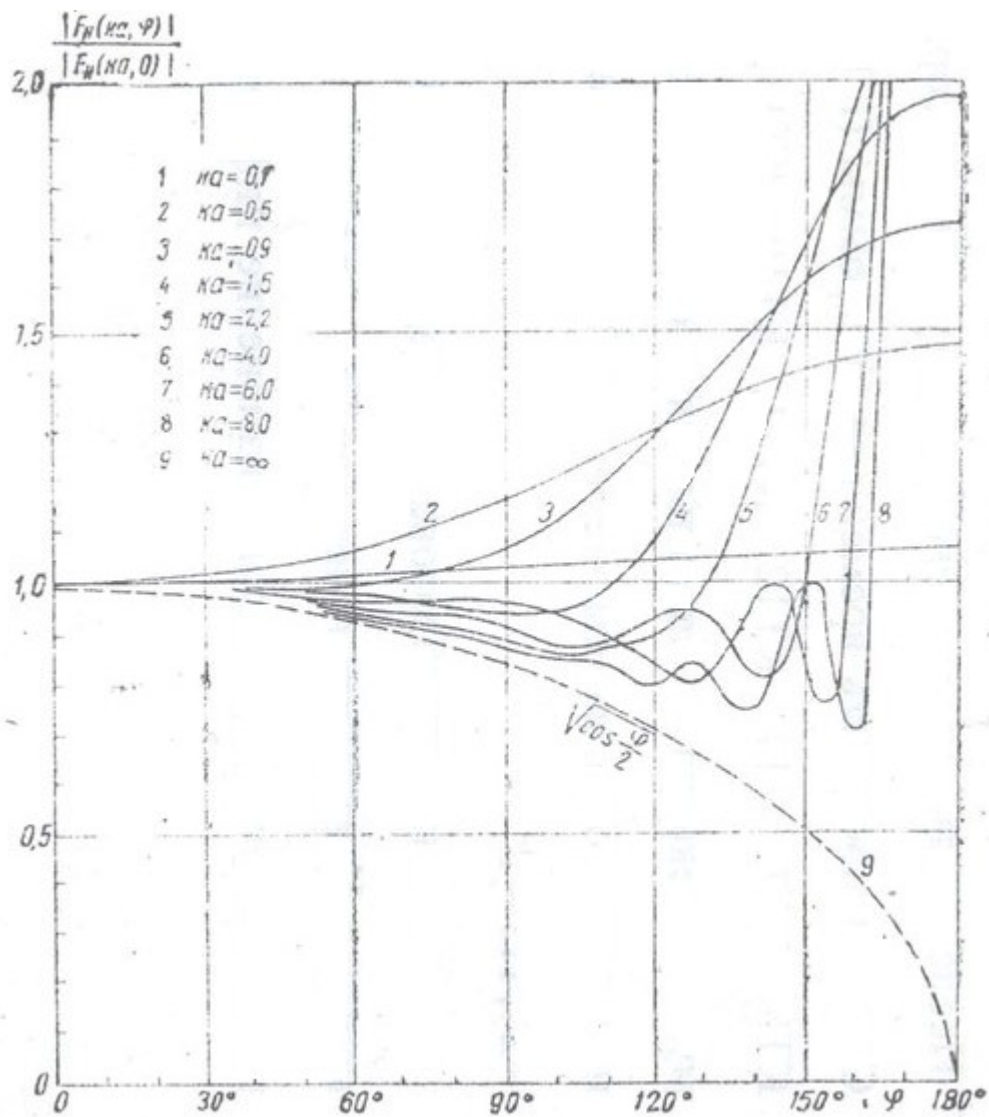


Рис.36 Графики відносних величин  $\frac{|F_H(ka, \varphi)|}{|F_H(ka, 0)|}$  від  $\varphi$

На рис. 37 зображені нормовані криві зміни амплітуд напруженості  $E_z$  вторинного поля при  $kr \gg 1$  залежновід кута  $\varphi$ , також побудовані для різних значень  $ka$ . Як видно з наведених графіків, криві  $|\dot{E}_z(\varphi)/|\dot{E}_z(0)|$  при збільшенні  $ka$  прагнуть до деякої граничної кривої, побудованої для значення  $ka \rightarrow \infty$ . Те ж саме можна сказати про криві розподілу модуля щільності струму в залежності від кута  $\varphi$ .

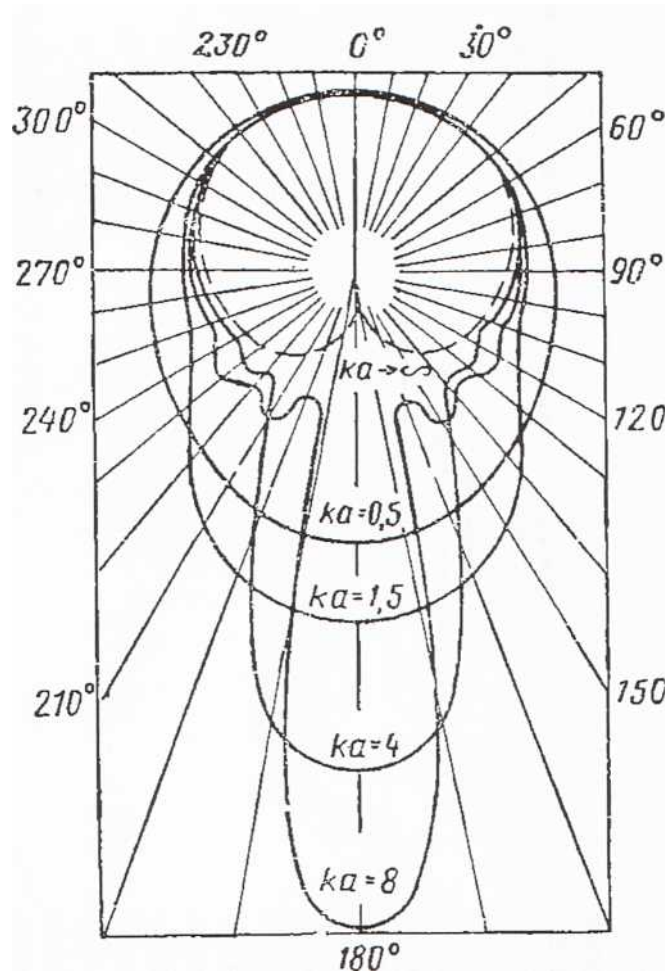


Рис. 37 Діаграма спрямованості вторинного поля при дифракції плоскої хвилі на провідному циліндрі.

Таким чином, в результаті проведеного аналізу визначили струм на поверхні циліндра, а також знайшли компоненти вторинного електромагнітного поля, збуджуваного цим струмом в навколишньому просторі.

Із формули (4.61) слідує

$$|E| = \frac{E_0}{\sqrt{kr}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} |F_E|. \quad (4.70)$$

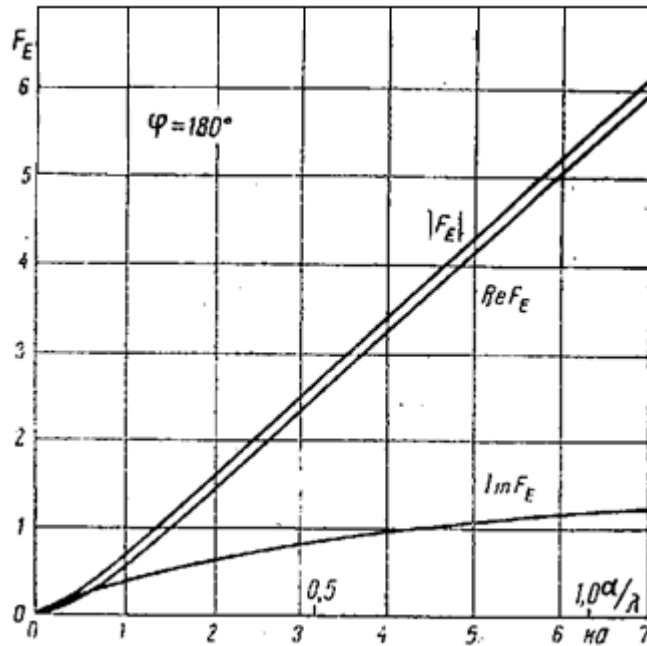


Рис.38. Графики залежностей  $F_E$  від  $ka$

Вважаючи, що величина  $ka$  змінюється за рахунок радіуса циліндра при  $\lambda = \text{const}$ , можемо знайти за допомогою кривих і формули (4.72) величину дифрагованого поля.

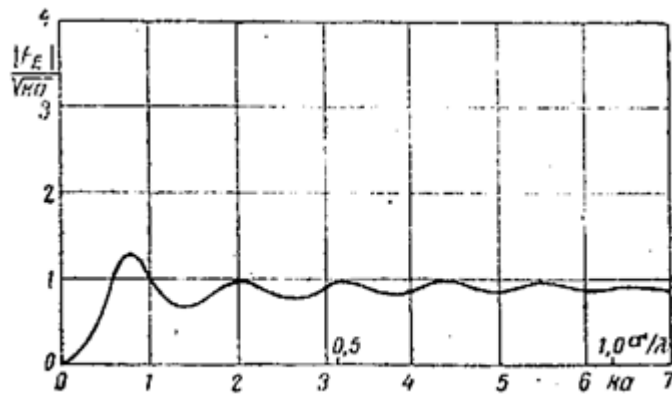


Рис.39. График відносної величини  $\frac{|F_E|}{\sqrt{ka}}$  від  $ka$

Якщо вважати  $a = \text{const}$  і  $\lambda = \text{var}$ , то величину  $|E|$  знайдемо, використовуючи формулу

$$|E| = E_0 \sqrt{\frac{a}{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|F_E|}{\sqrt{ka}} \quad (4.72)$$

і графіками  $|F_E| (ka)^{-1/2}$ , даними на рис. 41 і 42. При  $ka \gg 1$  крива

$|\ddot{F}_E(ka, 0)| (ka)^{-1/2}$  коливається біля значення  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ , крива  $|F_E(ka, \pi)| (ka)^{-1/2}$  при

збільшенні  $ka$  зростає як  $\sqrt{ka}$ . По кривій рис. 41 можна визначити резонансні частоти падаючого поля.

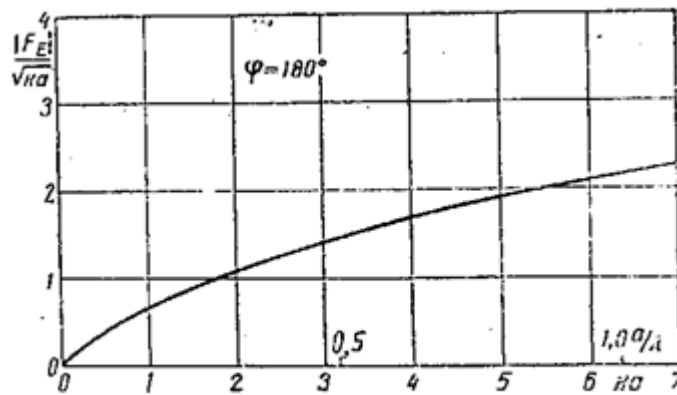


Рис.40 Графік відносної величини  $\frac{|F_E|}{\sqrt{ka}}$  від  $ka$

Форма «діаграм спрямованості» дифрагованого поля. Пунктиром нанесена гранична крива знайдена методами геометричної оптики. Тут так само, як і в випадку  $H_{\perp}$ , діаграми мають пелюстковий характер, причому число пелюстків збільшується по мірі збільшення  $ka$ . Відмінність заключається в глибших провалах між пелюстками, в більших відхиленнях від граничної кривої. При тих значеннях  $ka$ , які близькі до точок «антирезонансу»  $ka = 1,5; 2,6; 4,0$ , при  $\varphi = 0^\circ$  є неглибокий, але все ж помітний min. Тіньова пелюстка з max при  $180^\circ$  більш широка, ніж у випадку  $H_{\perp}$ .

На закінчення цього розділу приведемо криві густини струму на поверхні циліндра в випадку  $H_{\perp}$ , розраховані по формулі (4.46). Із кривих видно, що густина струму монотонно падає при обході периферії від  $\varphi = 0^{\circ}$  до  $\varphi = 180^{\circ}$ . При збільшенні  $ka$  криві  $|\bar{j}|$  поступово наближаються до граничної, накресленої пунктиром.

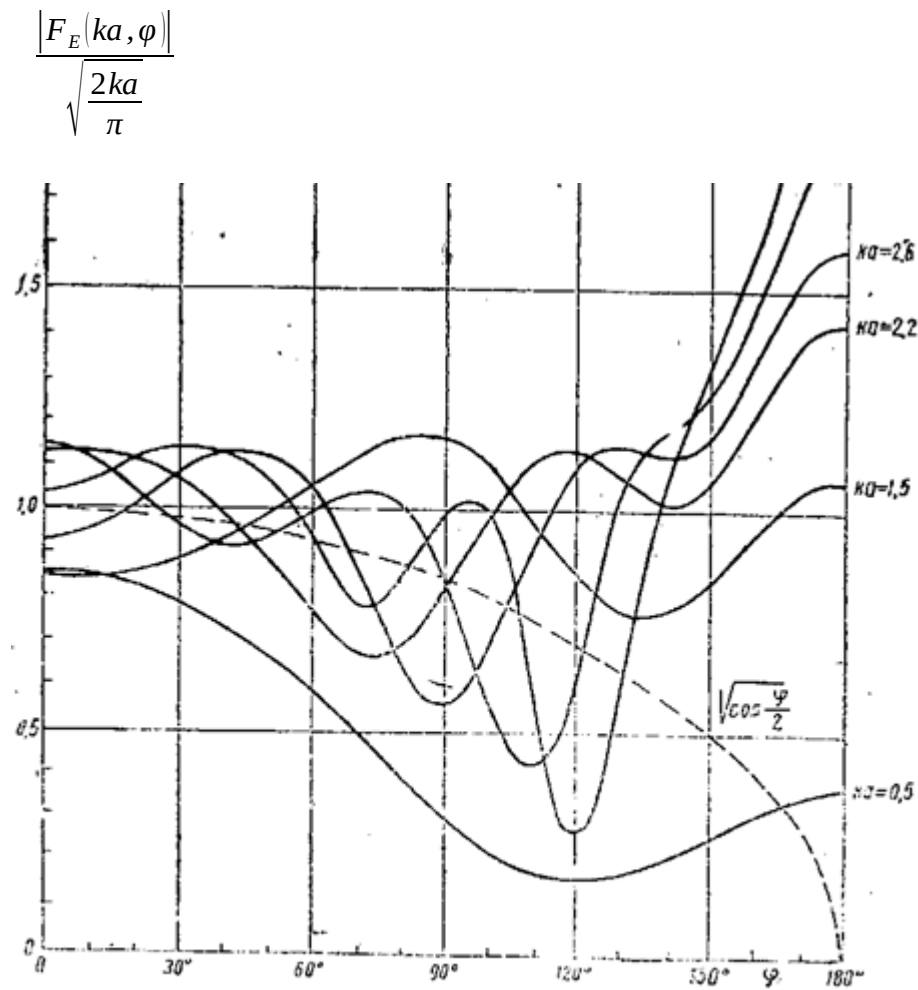


Рис. 41. Графики відносних величин  $\frac{|F_E(ka, \varphi)|}{\sqrt{\frac{2ka}{\pi}}}$  від  $\varphi$ .

### 5.1. Вивід основних формулів

Нехай нескінченно тонкий, ідеально відбиваючий екран, розташований в площині  $xz$ , співпадає з напівплощиною  $x > 0$ . Напрявлення приходу падаючої плоскої хвилі нормально до краю екрану складає кут  $\varphi_0$  з віссю  $x$ . Доповнимо фізичний простір допоміжним, фіктивним простором. Будемо вважати, що площина екрану являє собою площиною розрізу як фізичного, так і допоміжного простору а також, фізичний простір “зшитий” з допоміжним простором по площині розрізу. Вісь  $z$  являє собою лінією розгалуження.

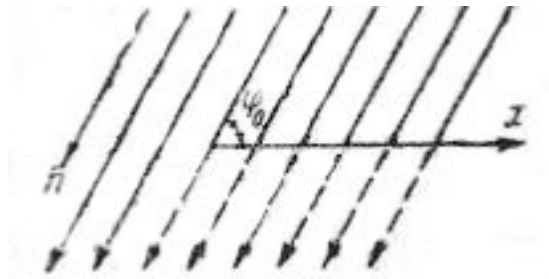


Рис.42. Фізичний та допоміжний простори

При цьому падаюча хвиля не відбивається від екрану, а переходить у допоміжний простір (рис. 42). Далі, вважаємо, що у допоміжному просторі також є хвиля, котра падає на екран під кутом  $2\pi - \varphi_0$  (дзеркальне відбивання дійсної падаючої хвилі). Ця хвиля, попадаючи на екран переходить у фізичний простір (рис. 43), створюючи, таким чином, потік, котрий називають відбитим.

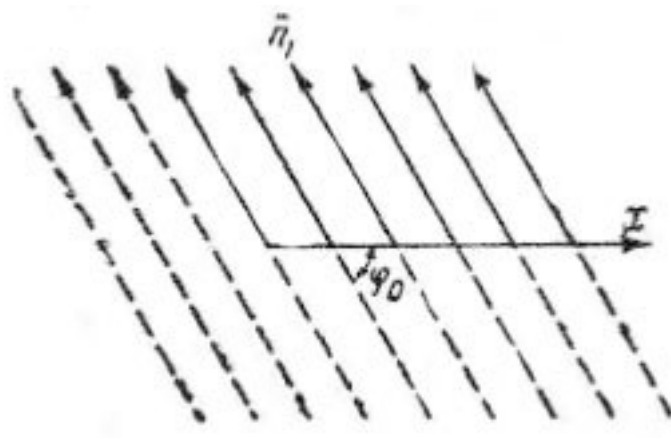


Рис. 43. Відбитий потік

Падаюча хвиля у фізичному просторі, потрапивши у допоміжний простір, частково огинає там лінію розгалуження і розсіюється у вигляді циліндричної хвилі (рис. 44). Точно так само падаюча хвиля у допоміжному просторі, вийшовши в фізичний простір (рис. 45), частково огинає лінію розгалуження.

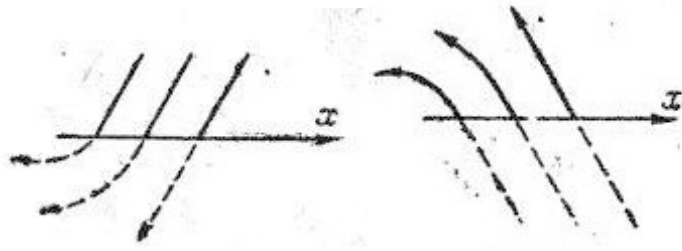


Рис. 44. Розсіювана хвиля

Рис. 45. Огинання ліній розгалуження

Проведений додаток фізичного простору допоміжним дозволяє використовувати для опису діючих хвильових процесів функції, регулярні у всіх точках простору (за винятком ліній розгалуження). Вигляд цих функцій буде встановлений далі.

Явища дифракції будуть різними при різній поляризації падаючого поля. Розв'язок задачі при довільній поляризації не складно написати, якщо відомі розв'язки двох часткових випадків, які розглянемо окремо.

**1 випадок**  $H_{\perp}$ . В цьому випадку вектор електричного поля  $\vec{E}$  падаючої хвилі паралельний краю екрану,  $\vec{E} = E_z \vec{i}$  і можна застосувати електричний вектор

Герца, який має одну компоненту  $Z_z$ . Вектор електричного поля  $\vec{E}$  відбитої

хвилі також буде мати тільки одну складову  $E_z$ . Таким чином в даному випадку достатньо знайти розв'язок рівняння

$$\Delta^2 E_z + k^2 E_z = 0 \quad (5.1)$$

з граничними умовами

$$E_z = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0; 2\pi. \quad (5.2)$$

**2 випадок**  $E_{\perp}$ . В цьому випадку вектор магнітного поля  $\vec{H}$  падаючої хвилі паралельний краю екрану і можна застосувати магнітний вектор Герца, який



має одну компоненту  $Z_z^*$ . Вектор магнітного поля також буде мати тільки одну компоненту  $H_z$  і в даному випадку необхідно розв'язати хвильове рівняння

$$\Delta^2 H_z + k^2 H_z = 0 \quad (5.3)$$

з граничними умовами:

$$E_z = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0; 2\pi. \quad (5.4)$$

Або, що випливає з рівнянь Максвелла, з граничними умовами:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0; 2\pi. \quad (5.5)$$

Таким чином задача в обох випадках зводиться до розв'язку хвильового рівняння

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (5.6)$$

Яке будемо розв'язувати в полярних координатах  $r, \varphi$  з граничними умовами:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, 2\pi \quad (5.7)$$

для першого випадку ( $u = E_z$ ) та

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, 2\pi \quad (5.8)$$

для другого випадку ( $u = H_z$ ).

Плоска хвиля, яка розповсюджується вздовж осі  $X$  по напрямку до початку координат, записується виразом (множник  $e^{-i\omega t}$  опускаємо):

$$u = Ae^{-ikx} = Ae^{-ikr \cos \varphi} \quad (5.9)$$

Якщо напрямок приходу хвилі  $\alpha$  довільне, то

$$u = Ae^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)} \quad (5.10)$$

В загальному випадку амплітуда хвилі  $A$  може залежати від  $\alpha$

$$u = A(\alpha)e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)} \quad (5.11)$$

Очевидно, що функції (5.9), (5.10) та (5.11) від  $r, \varphi$  є рішеннями хвильового рівняння (5.6). Розв'язком хвильового рівняння будуть також і комбінації функцій вигляду (5.11), наприклад:

$$u = \sum_n A_n(\alpha) e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)}$$

або

$$u = \int A(\alpha) e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)} d\alpha \quad (5.12)$$

Інтеграл (5.12) візьмемо в якості вихідної форми. Будемо вважати тепер  $\alpha$  комплексним числом і писати  $z$  замість  $\alpha$ .

Виберемо шлях інтегрування в комплексній площині  $z$  у вигляді круга  $\gamma$  з центром у точці  $z = \varphi_0$  (рис.46), а функцію  $A(z)$  візьмемо таку, щоб вона мала в

цій точці полюс першого порядку з лишком  $\frac{1}{2\pi i}$ , а саме

$$A(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{iz}}{e^{iz} - e^{i\varphi_0}} \quad (5.13)$$

При цьому, згідно з теоремою Коші

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{e^{iz} - e^{i\varphi_0}} e^{-ikr \cos(\varphi - z)} dz = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (5.14)$$

Таким чином інтеграл (5.14) представляє плоску хвилю, яка розповсюджується у напрямі  $\varphi \pm \pi$  (рис. 42).

Розглянемо поведінку функції

$$e^{-ikr \cos(\varphi - z)}$$

Якщо  $z = x_1 + iy_1$ , то

$$e^{-ikr \cos(\varphi - z)} = e^{-ikr \cos(\varphi - x_1) \cosh y_1} e^{kr \sin(\varphi - x_1) \sinh y_1}$$

При віддаленні від дійсної осі  $x_1$ , ця функція прямує до нуля, якщо

$\sin(\varphi - x_1) \sinh y_1 < 0$ , тобто при:

$$\begin{aligned} y_1 > 0, \sin(\varphi - x_1) < 0, \\ y_1 < 0, \sin(\varphi - x_1) > 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

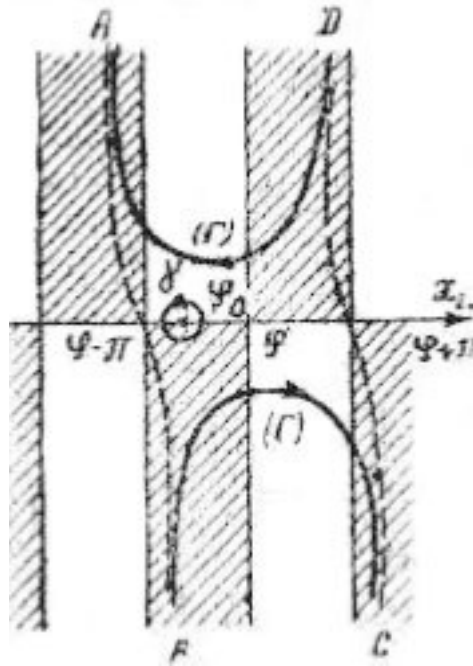


Рис. 46. Шлях інтегрування

На рис.46 області (5.15) заштриховані; вони обмежені прямими  $x_1 = \varphi \pm \pi$ .

Очевидно, що формула (5.14) залишиться справедливою при неперервному

деформуванні шляху інтегрування  $\gamma$  у криву, яка складається з двох гілок (Г) з точками B, C, D, A, які можна віднести на нескінченність, і двох зв'язуючих шляхів АВта CD.

Далі, так як вираз, який стоїть під інтегралом в (5.14), має період  $2\pi$ , то інтеграли по АВта CD взаємно знищуються, внаслідок протилежного напрямку

шляху при інтегруванні. Тому інтегрування достатньо проводити тільки по гілкам  $(\Gamma)$ .

$$u = \frac{1}{2\pi} \oint_{(\Gamma)} \frac{e^{iz}}{e^{iz} - e^{i\varphi_0}} e^{-ikr \cos(\varphi - z)} dz = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (5.16)$$

Положимо тепер

$$A(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\frac{iz}{2}}}{e^{\frac{iz}{2}} - e^{\frac{i\varphi_0}{2}}} \quad (5.17)$$

Функція (5.17) має період  $4\pi$  і має, як і раніше, полюс з лишком  $\frac{1}{2\pi i}$ .

Розглянемо інтеграл

$$u = \frac{1}{4\pi} \oint_{(\Gamma)} \frac{e^{\frac{iz}{2}}}{e^{\frac{iz}{2}} - e^{\frac{i\varphi_0}{2}}} e^{-ikr \cos(\varphi - z)} dz \quad (5.18)$$

Тут беремо ті ж шляхи інтегрування, що і в (5.16), тобто по двом гілкам  $(\Gamma)$  без зв'язуючих ліній АВ і CD. Інтеграл (5.18), як і (5.16), задовольняє хвильовому рівнянню (5.6) в координатах точки спостереження  $r, \varphi$ .

Так як підінтегральна функція являється неоднозначною, то для її уніфікації треба скористатись дволистою поверхнею Рімана. На першому листі поверхні

Рімана будемо вважати  $e^{\frac{iz}{2}} = +\sqrt{e^{iz}}$  на другому листі  $e^{\frac{iz}{2}} = -\sqrt{e^{iz}}$ .

При цьому полюс в точці  $z = \varphi_0$  буде знаходитись на першому листі. Точка

розгалуження буде при  $e^{iz} = 0$ , тобто при  $y_1 = +\sqrt{-1}$ . Вибір лінії розрізу пока відкладемо.

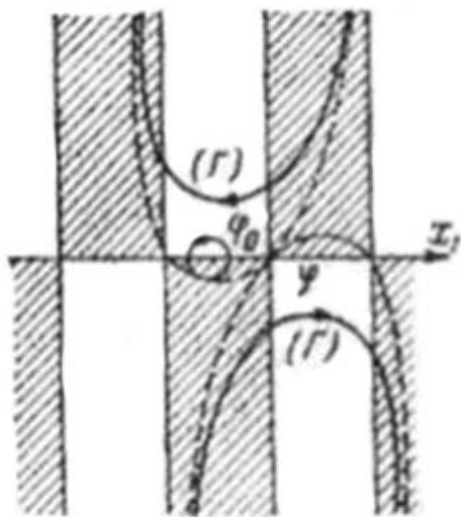


Рис.47. Шлях інтегрування на першому листі

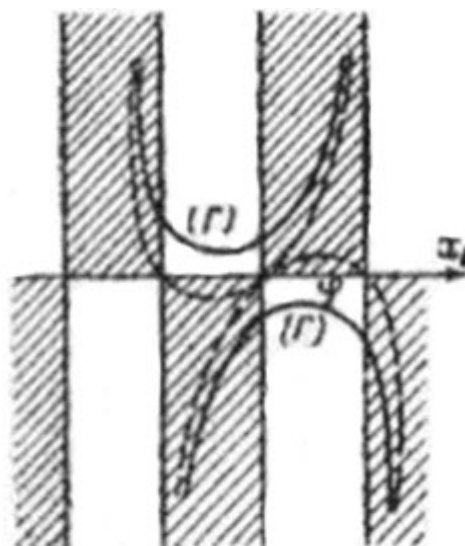


Рис. 48 Шлях інтегрування на другому листі

Оскільки множник  $e^{-ikr \cos(\varphi - z)}$  однаковий для обох листів, вираз під інтегралом (5.18) прямує до нуля при  $|y_1| \rightarrow \infty$  для обох листів, якщо точка  $z$  знаходиться всередині штрихованих смуг (рис. 46). Нагадаємо, що розбиття (5.15) площини  $z$  на смуги відбувається в залежності від кутової координати  $\varphi$  точки спостереження.

Величина інтегралу (5.18) буде різною, в залежності від того, на якому листі знаходяться шляхи інтегрування ( $\Gamma$ ). На рис.47 та 48 показані шляхи інтегрування на першому та другому листах  $z$ .

Так як функція  $A(z)$  має період  $4\pi$ , то на першому листі вона має полюси в

точках  $z = \varphi_0; z = \varphi_0 + 4\pi$  ... і на другому листі – в точках  $\varphi_0 + 2\pi; \varphi_0 + 6\pi$  ...

Припустимо, що  $r \rightarrow \infty$ , тоді на заштрихованих смугах підінтегральна функція перетворюється в нулю. Змістимо тепер вузли ( $\Gamma$ ) таким чином, щоб вони проходили тільки по заштрихованим областям, як показано на рис. 47 та 48 пунктиром.

Тоді на другому листі

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} u_2 \neq 0, \quad (5.19)$$

На першому листі при зміщенні верхньої частини гілки ( $\Gamma$ ) нам доведеться обійти полюс, і інтеграл (5.18) буде визначатись лишком в точці  $z = \varphi_0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} u_1 \neq e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (5.20)$$

Таким чином при інтегруванні по першому листі виходить вираз для вільно розповсюджуючої хвилі ( $r \rightarrow 0$ ), яка дійсно існує (рис. 42) при умові

$$|\varphi - \varphi_0| < \pi \quad (5.21)$$

Лінія  $|\varphi - \varphi_0| = \pi$  відповідає геометричній границі тіні. Тепер виконаємо операцію, яка була нами відкладена: проведемо розріз з точки розгалуження

$z = +i0$  по лінії  $x_1 = \text{const}$  так, щоб для точок  $z$  на першому листі виконувалось умова (5.21). Якщо кут  $\varphi$  такий, що

$$|\varphi - \varphi_0| > \pi \quad (5.22)$$

Тобто проходить в області тіні, переходимо на другий лист.

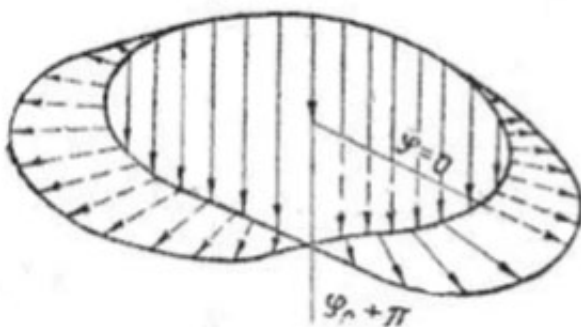


Рис. 49 Поле вільно розповсюджуючої хвилі      Рис. 50 Поле, відбите від екрану

Рис. 49 демонструє сказане: суцільною штриховкою показані кути  $\varphi$  у фізичному просторі, пунктирною штриховкою – кути у допоміжному просторі.

При  $0 < \varphi < \varphi_0 + \pi$  точка спостереження знаходиться на прямому світлі,

відповідно чому інтеграл на площині  $Z$  береться на першому листі і дає при цьому  $u_1$  (5.20). При  $\varphi_0 + \pi < \varphi < 2\pi$  точка спостереження знаходиться в області тіні, куди потрапляє тільки дифраговане поле, при цьому інтеграл на площині  $Z$  береться на другому листі і рівний  $u_2$ . При  $\varphi = \varphi_0 + \pi$  відбувається перехід з першого листа на другий.

Обчислення поля, відбитого від екрану, відбувається аналогічним способом, що демонструє рис.50. Будемо вважати, що відбита хвиля приходить на екран з допоміжного простору (суцільна штриховка) з напрямку -  $\varphi_0$ . При  $0 < \varphi < -\varphi_0 + \pi$  точка спостереження знаходиться в області відбитої хвилі, інтеграл на площині  $Z$  береться на першому листі і дає  $u_1$  (5.20). При  $-\varphi_0 + \pi < \varphi < 2\pi$  точки спостереження знаходяться поза областю відбитої хвилі, однак, поле останньої потрапляє і туди внаслідок дифракції; для цих точок обчислюємо інтеграл на другому листі площині  $Z$  і отримуємо  $u_2$  (5.19). При  $\varphi = -\varphi_0 + \pi$  відбувається перехід з першого листа в другий.

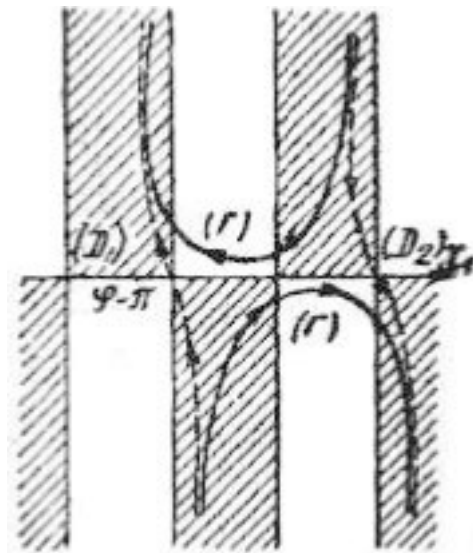


Рис. 51 Зміна шляхів інтегрування (порівнюючи рис. 48)

Приступимо тепер до обчислення інтегралу (5.18), припускаючи, що виконується нерівність (5.22), тобто беручи значення підінтегральної функції на другому листі. Шляхи інтегрування ( $\Gamma$ ), показані на рис. 48 видозмінюємо для

зручності обчислення так, як показано на рис. 51. Шляхи (D) еквівалентні шляхам (Г), оскільки в цікавій нам області підінтегральна функція регулярна.

Зробимо підстановки:

$$z = \varphi - \pi + \zeta$$

При інтегруванні по шляху  $D_1$  і

$$z = \varphi + \pi + \zeta$$

При інтегруванні по шляху  $D_2$ ; при цьому з (5.18) отримаємо:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi} \underset{(D_1)}{\diamond} \frac{-ie^{\frac{i\varphi+\zeta}{2}}}{-ie^{\frac{i\varphi+\zeta}{2}} - e^{-\frac{i\varphi_0}{2}}} e^{ikr \cos \zeta} d\zeta + \frac{1}{4\pi} \underset{(D_2)}{\diamond} \frac{ie^{\frac{i\varphi+\zeta}{2}}}{ie^{\frac{i\varphi+\zeta}{2}} - e^{-\frac{i\varphi_0}{2}}} e^{ikr \cos \zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \underset{[D_1]}{\diamond} \left\{ \frac{ie^{\frac{i\varphi+\zeta}{2}}}{ie^{\frac{i\varphi+\zeta}{2}} + e^{-\frac{i\varphi_0}{2}}} - \frac{ie^{\frac{i\varphi+\zeta}{2}}}{ie^{\frac{i\varphi+\zeta}{2}} - e^{-\frac{i\varphi_0}{2}}} \right\} e^{ikr \cos \zeta} d\zeta = \\ &= \frac{i}{4\pi} \underset{[D_1]}{\diamond} \frac{e^{ikr \cos \zeta}}{\cos \frac{\varphi_0 - \varphi - \zeta}{2}} d\zeta \end{aligned} \quad (5.23)$$

Зробимо ще раз підстановки:  $\xi = \eta$  для верхньої половини шляху інтегрування і  $\xi = -\eta$  для нижньої половини шляху; з'єднуючи потім обидві частини, отримаємо

$$\begin{aligned} u &= \frac{i}{4\pi} \underset{0}{\overset{+i}{\diamond}} \frac{1}{\cos \frac{\varphi_0 - \varphi - \eta}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\varphi_0 - \varphi + \eta}{2}} \} e^{ikr \cos \eta} d\eta = \\ &= \frac{i}{\pi} \underset{0}{\overset{+i}{\diamond}} \frac{\cos \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \frac{\eta}{2}}{\cos \eta + \cos(\varphi_0 - \varphi)} e^{ikr \cos \eta} d\eta = \\ &= \frac{i}{\pi} e^{-ikr \cos(\varphi_0 - \varphi)} \underset{0}{\overset{+i}{\diamond}} \frac{\cos \frac{\varphi_0 - \varphi}{2} \cos \frac{\eta}{2}}{\cos \eta + \cos(\varphi_0 - \varphi)} e^{ikr [\cos \eta + \cos(\varphi_0 - \varphi)]} d\eta \end{aligned} \quad (5.24)$$

Останній інтеграл зводиться до інтегралу Френеля.



При цьому отримаємо

$$u = \frac{e^{i\frac{7\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-ikr \cos(\varphi_0 - \varphi)} \int_{-\infty}^{\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} e^{i\tau^2} d\tau + C \quad (5.25)$$

Так як обчислення проводиться для другого листа  $|\varphi - \varphi_0| > \pi$  то при  $r \rightarrow \infty$

$$\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \rightarrow -\infty$$

Інтеграл прямує до нуля і рівність (5.25) набуває вигляду

$$0 = 0 + C$$

Звідки  $C = 0$ . Таким чином

$$u = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-ikr \cos(\varphi_0 - \varphi)} \int_{-\infty}^{\sqrt{kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} e^{i\tau^2} d\tau \quad (5.26)$$

Формула (5.26) дає значення  $u$  на другому листі, але за правилами

аналітичного продовження ця формула дійсна і для першого листа. Зробимо

перевірку: положимо, що  $r \rightarrow \infty$ , тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau = (1+i) \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}, u = e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

Що співпадає з (5.20).

Застосовуючи інтеграл Френеля

$$F_1(v) = \int_0^v i \frac{\pi t^2}{2} dt \quad (5.27)$$

Перетворимо формулу (5.26) в наступний вигляд

$$u(r, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2})\}; \quad (5.28)$$

Нагадаємо, що  $F_1(-v) = -F_1(v)$ , знак аргумента функції  $F_1$ , визначається

знаком  $\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}$ , величину  $\sqrt{\frac{kr}{\pi}}$  вважаємо додатнім.

Функція  $u$  (5.26) або (5.28) є розв'язком хвильового рівняння (5.6).

Граничні умови (5.7) будуть виконуватись при додаванні до (5.28) другої функції (зі знаком мінус)

$$u_{omp}(r, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2})\}, \quad (5.29)$$

Представляючи відбиту хвилю (рис. 43) Граничні умови (5.8) виконуються при додаванні до (5.28) функції (5.29) зі знаком плюс.

Таким чином для випадку  $H_\perp$  отримаємо формулу

$$E_z = \frac{E_0}{2} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2})\} - \frac{E_0}{2} e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2})\} \quad (5.30)$$

і для випадку  $E_{\perp}$  ;

$$H_z = \frac{H_0}{2} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2})\} +$$

$$+ \frac{H_0}{2} e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2})\}$$
(5.31)

Формули (5.30) та (5.31) дають рішення поставленої задачі.

Для цього, щоб отримати рішення, додатне при  $e^{-i\omega t}$ , зміщуємо шляхи

інтегрування по дійсній вісі  $x_1$  на деяку величину в бік від'ємних  $x_1$ .

## 5.2. Аналіз отриманого рішення

**Випадок**  $E_{\perp}$

Обчислимо густину струму на екрані. Так як (5.30) та (5.31) дають величину

результуючого поля, то з (5.31) знаходимо відразу, припускаючи, що  $\varphi = 0$

$$j = j_x = H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(2\sqrt{\frac{kx}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2})\}$$
(5.32)

- густина струму на освітленій стороні екрану, і припускаючи, що  $\varphi = 2\pi$ ,

густина струму на тіньовій стороні екрану

$$j = j_x = -H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \{1 - \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(2\sqrt{\frac{kx}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2})\}$$
(5.33)

Мінус, який стоїть попереду, виходить тому, що нормаль до тінявої сторони екрану напрямлена в бік від'ємних значень  $y$ .

$$F_1(\varphi) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \quad \cos \frac{\varphi_0}{2} > 0, x \gg \sqrt{2} |F_1|$$

Враховуючи рівність і припускаючи, що

отримуємо вдалині від краю екрану:

$$j_x = 2H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \quad \varphi = 0, \quad \text{при} \quad (5.34)$$

$$j_x = 0, \quad \varphi = 2\pi. \quad \text{при}$$

$$x \gg 0,1 \gg \sqrt{2} |F_1|:$$

Поблизу краю екрану, при

$$j_x = H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0}, \quad \varphi = 0 \quad \text{при}$$

$$j_x = -H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \quad \varphi = 2\pi. \quad \text{при} \quad (5.35)$$

Формули (5.35) показують, що у випадку  $E_{\perp}$  струми поблизу краю екрану на

освітленої та тінявої сторонах екрану рівні по величині, але течуть в

протилежні боки. Це означає, що на краю екрану зосереджені заряди відсутні:

струм, який тече по освітленій стороні екрану, огинає край екрану і переходить

на тіньову сторону (рис. 52). Цей висновок залишається вірним при будь-якому

куті падіння  $\varphi_0$  і, внаслідок цього, буде вірним і для екранів кінцевої величини,

наприклад, смуги, оскільки вплив (інших) країв екрану можна уявити у вигляді деякої сукупності падаючих вздовж екрану плоских хвиль.

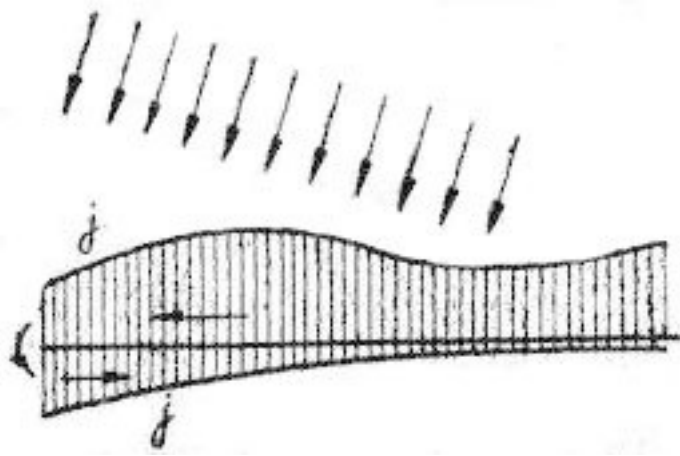


Рис.52.Струм, який тече по освітленій стороні екрану, огинає край екрану і переходить на тіньову сторону

Формули (5.32) та (5.33) показують, що при віддаленні від краю екрану густина струму на тіньовій стороні екрану монотонно зменшується, а на освітленій

стороні коливається біля величини  $2H_0$ .

Сумуючи (5.32) та (5.33) отримаємо сумарний струм, порівняно від (П.46)

$$j_x = 2H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1\left(2\sqrt{\frac{kx}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2}\right) \quad (5.36)$$

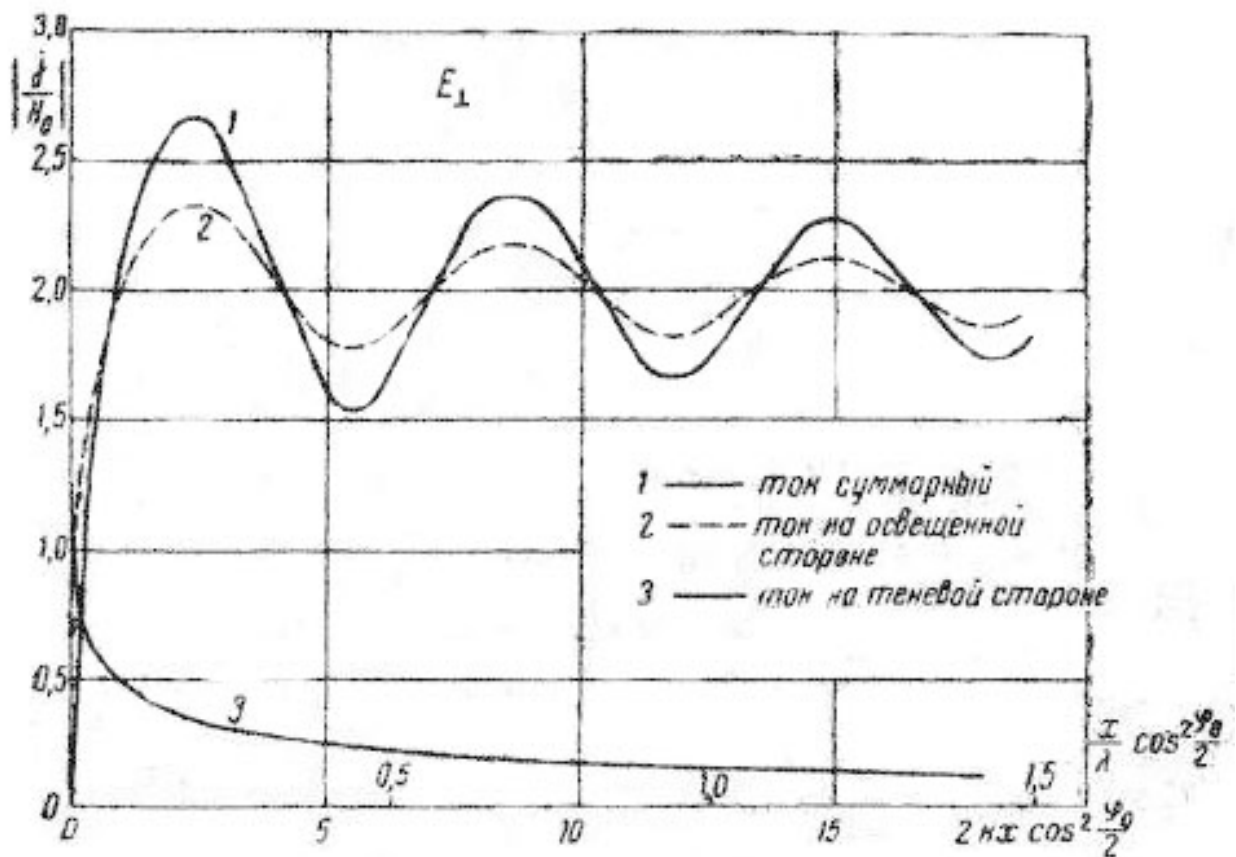


Рис. 53 Розподіл струму поблизу екрану

$$j = j(kx \cos^2 \frac{\varphi_0}{2})$$

На рис. 53 представлено розподіл струму поблизу екрану

При  $x \gg 0$  формула (5.36) має вигляд

$$j_x = -2H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \quad (5.37)$$

Та при  $x \rightarrow 0$

$$j_x = 0 \quad (5.38)$$

Виходячи з формули (5.36), можна визначити ширину зони крайового ефекту на поверхні екрану.

Ширина зони крайового ефекту залежить від кута падіння  $\varphi_0$ : вона мінімальна

при  $\varphi_0 \rightarrow 0$  та простягається в нескінченність при  $\varphi_0 \rightarrow \pi$  (рис. 53). При

$\varphi_0 = \pi$  сумарний струм  $j_x = 0$ , явище дифракції відсутнє; в цьому випадку

силові лінії електричного поля падаючої хвилі перпендикулярні до поверхні екрану; тіні немає.

$H_{\perp}$   
**Випадок**

Застосовуючи рівняння Максвелла, знаходимо з (5.30):

$$\begin{aligned} i\omega\mu H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = \frac{E_0}{2r} ikr \sin(\varphi - \varphi_0) e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(-)\} - \\ - \frac{E_0}{2r} ikr \sin(\varphi - \varphi_0) e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \{1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1(+)\} + \\ + \frac{E_0}{2r} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kr \cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} - \\ - \frac{E_0}{2r} e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kr \cos^2 \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$H_z = 0.$$

Струм на поверхні екрану має тільки одну компоненту по осі  $z$ . Припускаючи

$$\varphi = 0$$

, отримаємо з (5.39) для освітленої сторони екрану:

$$j_z = -H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \sin \varphi_0 \left\{ 1 + \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) + \right. \\ \left. + i \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kx \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{2\pi kx} \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right\}; \quad (5.40)$$

При  $x \rightarrow 0$ ,  $j_z = -2H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \sin \varphi_0$ ,

Припускаючи, що  $\varphi = 2\pi$  отримаємо з (5.39) для тіньової сторони екрану:

При  $x \rightarrow 0$ ,  $j_z = 0$ .

$$j_z = H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \sin \varphi_0 \left\{ 1 - \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2\sqrt{\frac{kr}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) - \right. \\ \left. - i \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kx \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{2\pi kx} \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right\}; \quad (5.41)$$

Як видно з формул (5.40) і (5.41), струм поблизу краю тече на обох сторін

екрану в один бік; при  $x \rightarrow 0$

$$j_z \rightarrow -H_0 \sin \frac{\varphi_0}{2} \frac{i\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi kx}} \quad (5.42)$$



Густина струму при  $x \rightarrow 0$  прямує до нескінченності, однак, струм на смугі екрану кінцевої ширини кінцевий, так як інтеграл

$$\int_0^a x^{-1/2} dx$$

збігається.

Сумуючи (5.40) та (5.41), отримаємо сумарний струм

$$j_z = -2H_0 e^{-ikx \cos \varphi_0} \sin \varphi_0 \left\{ \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} F_1 \left( 2\sqrt{\frac{kx}{\pi}} \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) + \right. \\ \left. + i \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2kx \cos^2 \frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{2\pi kx} \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right\} \quad (5.43)$$

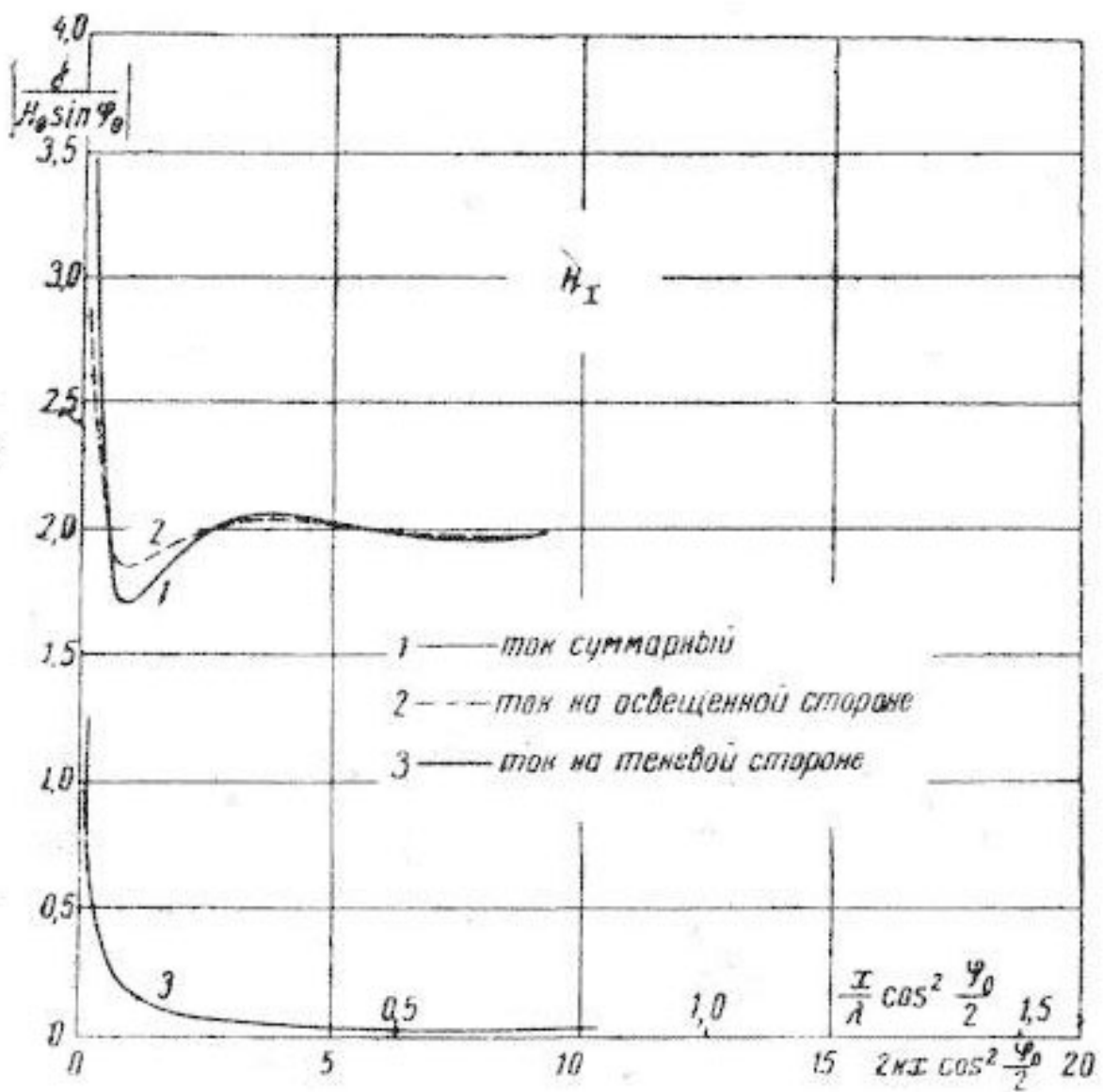


Рис. 54 Розподіл струму поблизу краю екрану

На рис. 54 показано розподіл струму поблизу краю екрану. На відміну від

випадку  $E_{\perp}$  тут зона крайового ефекту має незначну ширину.

## 6. МЕТОД ВІНЕРА-ХОПФА

Інтегральні перетворення знаходять широке застосування при рішенні крайових задач електродинаміки. Розв'язок задачі відбивання радіохвиль від плоскої межі розділу двох середовищ, задачі дифракції електромагнітних хвиль на циліндрі, задачі збудження нескінченного металічного клинка отримуються найбільш ефективно з застосуванням інтегрального перетворення Фур'є на нескінченному проміжку  $(-\infty, \infty)$ . Застосування інтегрального перетворення к диференціальному рівнянню та к граничним умовам зводить задачу до алгебраїчного рівняння відносно спектральної щільності шуканої функції, рішення котрого, як правило, являється більш простим, чим рішення вихідного диференціального рівняння.

Особливо легко знайти вигляд для спектральної щільності, коли граничні значення шуканої функції задані на всьому відрізку застосування інтегрального перетворення. Однак існує клас задач, в котрому спектральна щільність може бути знайдена та в разі знаходження крайових умов на частини відрізка інтегрального перетворення. Метод рішення рівняння для спектральної щільності в таких випадках використовує особливі властивості спектральної щільності як аналітичної функції комплексної змінної с невідомою поведінкою на бескінечності. Цей метод був запропонований у 1932 року Вінером та Хопфом при рішенні інтегрального рівняння з різницеvim ядром та півнескінченим  $(0, \infty)$  інтервалом інтегрування. Інтегральні рівняння такого типу в електродинаміці отримуються при рішенні задачі дифракції плоскої хвилі на металевій півплощині, при рішенні задачі випромінення з відкритого кінця круглого хвилеводу, тобто як раз в тих випадках, коли граничні значення шуканої функції, наприклад типу  $E_t=0$ , можливо встановити лише тільки на проміжку  $(0, \infty)$ . Застосування перетворення Фур'є на проміжку  $(-\infty, \infty)$  для рішення подібних задач призводить до рівняння для спектральної щільності, розв'язуємо методом Вінера та Хопфа.

Застосування перетворення Фур'є до рівняння у часткових похідних приводить до наступних типових задач. Потребується знайти невідомі функції

$\Phi_+(\lambda)$  та  $F_-(\alpha)$ , що задовольняють функціональному рівнянню

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha)+B(\alpha)F_-(\alpha)+C(\alpha)=0,$$

яке повинно виконуватися в смугі  $\tau_- < \tau < \tau_+$ ,  $-\infty < \sigma < \infty$  в комплексній площині  $\alpha$ , при чому  $\Phi_+(\alpha)$  повинна бути регулярна в півплощині  $\tau > \tau_-$ , а  $F_-(\alpha)$  повинні бути регулярні в півплощині  $\tau < \tau_+$ , крім того, ці функції повинні задовольняти в відповідних півплощинах певним умовам на нескінечності. Функції  $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$  вважаються заданими функціями  $\alpha$ , регулярними в полосі. Крім того, для спрощення візьмемо, функції  $A$  та  $B$  не мають в цій полосі нулів.

Основний крок при рішенні цього рівняння методом Вінера — Хопфа полягає у факторизації, тобто визначенні функцій  $K_+(\alpha)$ , регулярної та не маючих нулів в півплощині  $\tau > \tau_-$ , та функції  $K_-(\alpha)$ , регулярної та не маючої нулів в півплощині  $\tau < \tau_+$ , таких, що

$$\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = \frac{K_+(\alpha)}{K_-(\alpha)}$$

Іноді функції  $K_+$  та  $K_-$  можна просто вгадати, розглядаючи ліву частину цього рівняння. Використовуючи рівняння, перепишемо наступне рівняння так :

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha)+K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha)+\frac{K_-(\alpha)C(\alpha)}{B(\alpha)}=0,$$

Представимо член  $[K_-(\alpha)C(\alpha)]/B(\alpha)$  у вигляді

$$\frac{K_-(\alpha)C(\alpha)}{B(\alpha)}=C_+(\alpha)+C_-(\alpha)=0,$$

де функція  $C_+(\alpha)$  регулярна при  $\tau > \tau_-$ , а функція  $C_-(\alpha)$  регулярна при  $\tau < \tau_+$ . Використовуючи вище написане рівняння, перегрупуємо доданки в рівнянні та введемо нову функцію  $J(\alpha)$  рівняннями  $J(\alpha)=K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha)+C_+(\alpha)=-K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha)+C_-(\alpha),$

Доки що функція  $J(\alpha)$  визначена лише в полосі  $\tau_-, < \tau < \tau_+$ . Однак функція  $K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha)+C_+(\alpha)$ , визначена і регулярна в півплощині  $\tau > \tau_-$ , а функція  $-K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha)-C_-(\alpha)$  визначена та регулярна в площині  $\tau < \tau_+$ . Таким чином, аналітичним продовженням функцію  $J(\alpha)$  можна визначити на всій площині  $\alpha$ , при чому  $J(\alpha)$ , очевидно, регулярна на всій площині  $\alpha$ . Припустимо тоді, що мають місце оцінки

$$|K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha)+C_+(\alpha)| < |\lambda|^p \text{ при } \alpha \rightarrow \infty, \tau > \tau_-$$

$$|K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha)+C_-(\alpha)| < |\lambda|^q \text{ при } \alpha \rightarrow \infty, \tau < \tau_+$$

Тоді по узагальненій теоремі Лівуалля функція  $J(\alpha)$  являється поліномом  $P(\alpha)$  ступеня не вище цілої частини  $\min(p, q)$

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha)+C_+(\alpha)=P(\alpha)$$

$$K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha)+C_-(\alpha)=-P(\alpha)$$

Із цих рівнянь функції  $\Phi_+(\alpha)$  та  $\Psi_-(\alpha)$  визначаються з точністю до довільного полінома  $P(\alpha)$ , тобто з точністю до кінцевого числа довільних постійних, які повинні бути визначені іншим способом.

Щоб детально прослідкувати особливості цього математичного методу, розглянемо конкретну задачу про випромінення нескінченної синфазної нитки електричного струму в присутності ідеально провідної тонкої півплощини. Нехай в прямокутній системі координат  $x, y, z$  положення нити характеризується координатами  $x_0, y_0$ , а край півплощини співпадає з віссю  $z$ . Величина стороннього електричного струму не міняється по довжині нитки, як наслідок, електромагнітне поле теж не залежить від  $z$ . Усі компоненти електромагнітного поля, що збуджується ниткою електричного струму, можуть бути виражені через компоненту  $A_{z^3}$  векторного потенціалу електричного струму, які задовольняють неоднорідному хвильовому рівнянню

$$\frac{\partial^2 A_{z^3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{z^3}}{\partial y^2} + k^2 A_{z^3} = -I_{z^3} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$$

Розглянута задача є достатньо частковим випадком збудження півплощини, однак вона в повній мірі дозволяє проілюструвати суть

математичного методу без збільшення кількості однорідних викладок, зв'язаних зі збільшенням числа складових векторних потенціалів поля.

Застосуємо до рівняння перетворення Фур'є, перемноживши його на

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\chi x}$  та проінтегруємо по  $x$  від  $-\infty; +\infty$ . Нехай  $\Phi(\chi, y)$  - спектральна щільність функції  $A_z^{\vartheta}(x, y)$ :

$$\Phi(\chi, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_z^{\vartheta}(x, y) e^{i\chi x} dx$$

Потенціал  $A_z^{\vartheta}(x, y)$  по спектральній щільності в  $\Phi(\chi, y)$  визначаються формулою звернення:

$$A_z^{\vartheta}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\chi, y) e^{-i\chi x} d\chi$$

На площині комплексної змінної  $\alpha$  функція  $\Phi(\chi, y)$  є аналітичною функцією в деякій полосі, визначеною поведінкою  $A_z^{\vartheta}(x, y)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . При визначенні полоси аналітичності звичайно використовують наступне. Вважається, що середовище, у якому поширюються електромагнітні хвилі, мають втрати та постійна поширення  $k$  є комплексною величиною.

$$k = k_1 - ik_2;$$

$$k_1 > 0; \quad k_2 > 0.$$

В такому випадку для  $A_z^{\vartheta}(x, y)$  при  $|x| \rightarrow \infty; |y| \rightarrow \infty$  справедлива наступна оцінка:

$$A_z^{\vartheta}(x, y) = 0 \left( \exp - k_2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

У відповідності з вище вказаними рівняннями полоса аналітичності  $\Phi(\chi, y)$ , визначена значеннями комплексної змінної  $\chi$ , для яких сходиться інтеграл, задається рівністю

$$-k_2 < \text{Im } \chi < k_2.$$

Коли втрати в середі відсутні,  $k_2 = 0$  та ширина полоси аналітичності  $\Phi(\chi, y)$  також рівна нулю. Ця обставина затрудняє подальші маніпуляції в площині комплексних значень  $\chi$ , через це у випадку середі без втрат доцільно користуватися граничним переходом  $k_2 \rightarrow 0$  вже в кінцевих виразах.

В полосі  $-k_2 < Jmx < k_2$  функція  $\Phi(\chi, y)$  задовольняє звичайному диференціальному рівнянню, отриманому в результаті застосування інтегрального перетворення Фур'є до рівняння :

$$\frac{\partial^2 \Phi(\chi, y)}{\partial y^2} - (\chi^2 - k^2) \Phi(\chi, y) = \frac{-I_z^3}{\sqrt{2\pi}} e^{ixx_0} \delta(y - y_0)$$

Це рівняння є однорідним всюди, крім точки  $y = y_0$ , та рішення його може бути представлено для кожного із трьох інтервалів  $(-\infty, 0); (0, y_0); (y_0, \infty)$  у вигляді комбінацій двох незалежних рішень:

$$e^{-y\sqrt{\chi^2 - k^2}}; e^{y\sqrt{\chi^2 - k^2}}$$

У зв'язку з оцінкою рівняння не важко одразу записувати рішення для  $y > 0; y > y_0$  :

$$\Phi(\chi, y) = \Phi_I(\chi, y) = A(\chi) e^{y\sqrt{\chi^2 - k^2}} \quad \text{при} \dots y < 0$$

$$\Phi(\chi, y) = \Phi_{II}(\chi, y) = B(\chi) e^{-y\sqrt{\chi^2 - k^2}} \quad \text{при} \dots y < y_0$$

При виборі рішення  $\Phi_{III}(\chi, y)$  для інтервалу  $(0, y_0)$  варто керуватися відношеннями, що зв'язують рішення рівняння по різні сторони від  $\delta$  в точку  $y_0$  :

$$\Phi_{II}(\chi, y_0 + 0) = \Phi_{III}(\chi, y_0 - 0)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} \Phi_{II}(\chi, y) \right]_{y_0 + 0} - \left[ \frac{\partial}{\partial y} \Phi_{III}(\chi, y) \right]_{y_0 - 0} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} I_z^3 e^{ixx_0}$$

В силу цього функція  $\Phi_{III}(\chi, y)$  містить обидва незалежні рішення та має наступний вигляд:

$$\Phi_{III}(\chi, y) = B(\chi) e^{-y\sqrt{\chi^2 - k^2}} + \frac{I_z^3 e^{ixx_0}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\chi^2 - k^2}} \text{sh}(y - y_0) \sqrt{\chi^2 - k^2}$$

Таким чином, спектральна щільність  $\Phi(\chi, y)$  залежить від двох невідомих:  $A(\chi)$  та  $B(\chi)$ , які треба визначити з граничних умов  $E_t = 0$  на півплощині  $y = 0, \chi < 0$ .

Компоненти електромагнітного поля визначаються по  $A_z^3$  з допомогою формул наступним чином:

$$E_z = \frac{k^2}{i\omega\epsilon_a} A_z^3; \quad H_x = \frac{\partial A_z^3}{\partial y}; \quad H_y = \frac{-\partial A_z^3}{\partial x};$$

Рівність нулю  $E_z$  та, одержані з цього,  $A_z^3$  при  $y=0; x<0$  дає можливість установити деякі властивості функції  $A(\chi)$  :

$$A(\chi) = \Phi(\chi, 0) = \int_0^{\infty} A_z^3(x, 0) e^{i\chi x} dx = A_+(\chi)$$

Функція  $A(\chi)$ , визначена інтегралом, являється регулярною у верхній півплощині комплексної змінної  $\chi$ , точніше при  $\text{Im } \chi > -k_2$ . Цей висновок слідує із неважких оцінок інтеграла з врахуванням рівняння.

Різниця  $\left[ \frac{\partial}{\partial y} A_z^3(x, y) \right]_{y=+0} - \left[ \frac{\partial}{\partial y} A_z^3(x, y) \right]_{y=-0}$ , навпаки, відрізняється від нуля тільки при  $x < 0$ , де вона представляє собою поверхневий електричний струм на півплощині. З цього слідує:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial y} A_z^3(x, y) \right]_{y=+0} - \left[ \frac{\partial}{\partial y} A_z^3(x, y) \right]_{y=-0} \right] e^{i\chi x} dx = A_-(\chi)$$

де  $A_-(\chi)$  - регулярна при  $\text{Im } \chi < k_2$ .

В цьому рівнянні можливо змінити порядок диференціювання та інтегрування в силу рівномірної збіжності інтеграла в полосі аналітичності функції  $\Phi(\chi, y)$ . Отримаємо:

$$-\sqrt{\chi^2 - k^2} B(\chi) + \frac{I_z^0 e^{i\chi x_0}}{\sqrt{2\pi}} \chi y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2} - A(\chi) \sqrt{\chi^2 - k^2} = A_-(\chi)$$

Ще одне співвідношення, що зв'язує  $A(\chi)$  та  $B(\chi)$ , отримується з умови неперервності  $E_t$ , а разом з ним  $A_z^3$  при  $y=0$  :

$$A(\chi) = B(\chi) - \frac{I_z^3 e^{i\chi x_0}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\chi^2 - k^2}} \chi y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2}$$

Виключив тепер з рівнянь функції  $A(\chi)$  та  $B(\chi)$ , отримаємо функціональне рівняння відносно  $A_+(\chi)$  а  $A_-(\chi)$  :

$$-2 A_+(\chi) \sqrt{\chi^2 - k^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_z^3 e^{i\chi x_0 - y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2}} = A_-(\chi) \quad (6.1)$$



Та обставина, що граничні умови задані тільки на частині інтервалу інтегрального перетворення  $(-\infty; 0)$ , приводить к тому, що не можемо одразу знайти вираз для  $A(\chi)$  та  $B(\chi)$ . Фактично маємо тільки одне співвідношення, що зв'язує їх. Однак виявляється, що рівняння, також зв'язуючі дві невідомі функції, вдається розв'язати, користуючись специфічними властивостями  $A_+(\chi)$  та  $A_-(\chi)$  як аналітичних функцій комплексної змінної.

Спосіб вирішення рівняння типу попереднього, запропонований Вінером та Хопфом, полягає в наступному. Множник при функції  $A_+(\chi)$ , позначуваний як  $K(\chi)$  (чи множник при  $A_-(\chi)$  якщо множник у  $A_+(\chi)$  одиниця), представляється у вигляді результат множення двох функцій  $K_-(\chi)$  та  $K_+(\chi)$ , регулярних та не маючих нулів відповідно у верхній та нижній півплощині комплексних значень  $\chi$ . Та операція називається факторизацією, та для обчислення  $K_+(\chi)$  та  $K_-(\chi)$  існують регулярні формули:

$$\ln K_+(\chi) = \frac{1}{i2\pi} \int_{-ic-\infty}^{-ic+\infty} \frac{\ln K(\alpha)}{\alpha - \chi} d\alpha$$

$$\ln K_-(\chi) = \frac{-1}{i2\pi} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{\ln K(\alpha)}{\alpha - \chi} d\alpha$$

Рівність  $K(\chi) = K_+(\chi)K_-(\chi)$  виконується в полосі значень  $\chi - c < \text{Im}\chi < d$ , причому прямі лінії  $\text{Im}\chi = -c$  та  $\text{Im}\chi = d$  повинні знаходитися в полосі існування рівняння (6.1) (рис.55). Для  $c; d$  справедлива, таким чином, нерівність  $-k_2 < -c < d < k_2$ . Умовою застосування формул є потреба зменшення функції

$\ln K(\chi) = \ln K(\gamma + i\beta)$  при  $|\gamma| \gg \beta$  рівномірно у смугі  $-c \ll \beta \ll d$ :

$$\ln K(\gamma + i\beta) = 0(|\gamma|^{-p}); \quad p > 0$$

Функція  $\ln K(\chi) = \ln(-2\sqrt{\chi^2 - k^2})$ , очевидно, не спадає при  $\chi \gg k$  та  $\chi \ll -k$ .

У подібних випадках функціональне рівняння необхідно помножити почлено на

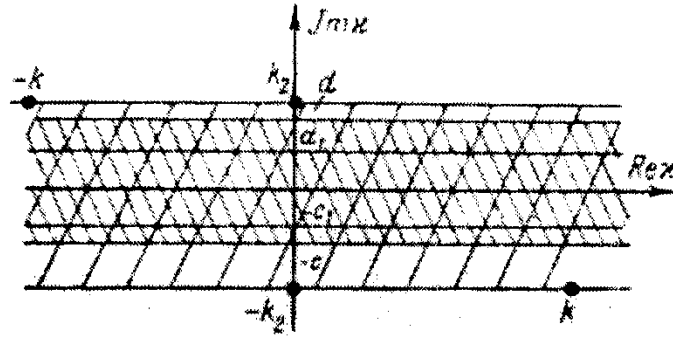


Рис. 55. До рішення рівняння (6.1)

деяку функцію  $L_-(\chi)$ , що не змінює властивостей  $A_-(\chi)$  (добуток залишається регулярним в нижній частині півплощини). В розглянутій задачі

таким множником є 
$$L_-(\chi) = \frac{1}{\chi + k},$$

І нове функціональне рівняння має вигляд:

$$2A_+(\chi) \frac{\sqrt{\chi^2 - k^2}}{\chi + k} - \frac{I_z^2}{\sqrt{2\pi}(\chi + k)} e^{i\chi x_0 - y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2}} = \frac{-A_-(\chi)}{\chi + k}. \quad (6.2)$$

У випадку простих функціональних рівнянь, іноді можна вгадати функції  $K_-(\chi)$  і  $K_+(\chi)$  та немає необхідності в обчисленні комплексних інтегралів, хоча в загальному випадку без таких обчислень обійтись не вдається. Що стосовно рівняння (6.2), то тут

$$K_+(\chi) = \sqrt{\chi - k} \quad \text{і} \quad K_-(\chi) = \frac{2}{\sqrt{\chi + k}} \quad (6.3)$$

Функції  $K_+(\chi)$  і  $K_-(\chi)$  в (6.3) не являються однозначними, точки  $k$  і  $-k$  - їхні точки галуження. При факторизації потрібно вибрати такі гілки  $\sqrt{\chi - k}$  і  $\sqrt{\chi + k}$ , щоб добуток  $\sqrt{\chi - k} \sqrt{\chi + k}$  мав додатну дійсну частину при  $\chi \rightarrow \infty$  та  $\chi \rightarrow -\infty$ .

Перемножимо рівняння (6.3) на  $\frac{1}{2} \sqrt{\chi + k}$ , підготувавши його до наступного кроку розв'язку функціонального рівняння:

$$A_+(\chi) \sqrt{\chi-k} - \frac{I_z^2}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{\chi+k}} e^{i\chi x_0 - y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2}} = -\frac{A_-(\chi)}{2\sqrt{\chi+k}}. \quad (6.4)$$

Від кожного члена рівняння (6.4) обчислимо інтеграл Коші по контуру  $Jm\chi = -c_1$ , повністю розташованого в смузі існування рівняння (6.4):  $-c < Jm\chi < d$  (рис. 55 і 56). В результаті інтегрування в площині комплексних значень  $\chi$  отримують рівняння наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{-ic_1}^{ic_1} \frac{A_+(\chi) \sqrt{\chi-k}}{\chi-\gamma} d\chi - \frac{I_z^2}{2\pi i} \oint_{-ic_1}^{ic_1} \frac{e^{i\chi x_0 - y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{\chi+k}(\chi-\gamma)} d\chi = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{-ic_1}^{ic_1} \frac{A_-(\chi)}{2\sqrt{\chi+k}(\chi-\gamma)} d\chi. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для першого інтегралу контур інтегрування можна доповнити півколом нескінченного радіусу в верхній півплощині, так як інтеграл по такому доповненому контуру рівний нулю. Дійсно, у смузі  $-c < Jm\chi < d$  добуток  $A_+(\chi) \sqrt{\chi-k}$  зникає при  $\chi \rightarrow \infty$  внаслідок зменшення двох інших членів рівняння, а при  $\chi \rightarrow +i\infty$  функція  $A_+(\chi)$  зменшується. Всередині замкненого контуру інтегрування

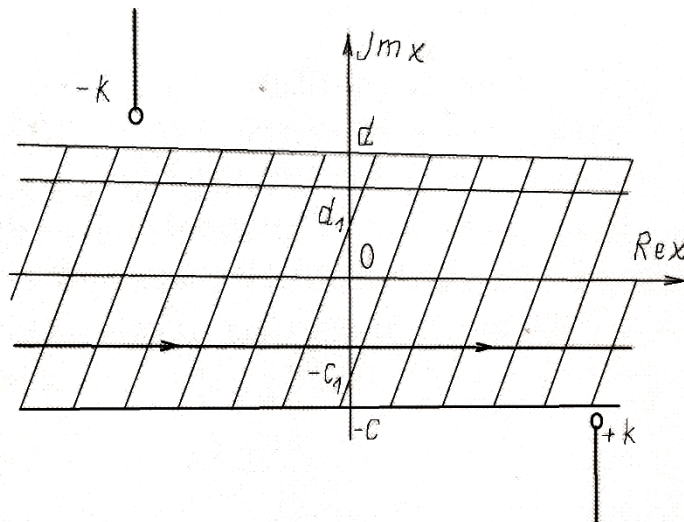


Рис. 56. Контур інтегрування у формулі (6.4)

підінтегральна функція має єдину особливість – полюс в точці  $\chi = \gamma$  (рис. 56) та інтеграл рівний вираховуванню в цій точці:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{-c_1}^{-ic_1} \frac{A_+(\chi) \sqrt{\chi-k}}{\chi-\gamma} d\chi = A_+(\gamma) \sqrt{\gamma-k} \quad (6.5a)$$

Другий інтеграл в рівнянні (6.5) представляє собою відому функцію, що залежить лише від джерела збудження.

В третьому інтегралі контур інтегрування можна доповнити півколом нескінченного радіусу в нижній півплощині  $\chi$ . Оскільки всередині такого замкненого контуру інтегрування відсутні будь-які особливості, інтеграл виявляється рівним нулю.

$$A_+(\chi) = \frac{I_z}{i\sqrt{32\pi^3}\sqrt{\chi-k}} \oint_{-c_1}^{-c_1} \frac{e^{i\alpha x_0 - y_0 \sqrt{\alpha^2 - k^2}}}{\sqrt{\alpha+k}(\alpha-\chi)} d\alpha \quad (6.6)$$

Визначивши функцію  $A_+(\chi)$ , рівну  $A(\chi)$  легко знайти вираз для функції  $B(\chi)$ :

$$B(\chi) = \frac{I_z e^{i\chi x_0}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{sh} y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2} + \frac{I_z}{i\sqrt{32\pi^3}\sqrt{\chi-k}} \oint_{-c_1}^{-c_1} \frac{e^{i\alpha x_0 - y \sqrt{\alpha^2 - k^2}}}{\sqrt{\alpha+k}(\alpha-\chi)} d\alpha. \quad (6.7)$$

Підставивши функції  $A(\chi)$  і  $B(\chi)$ , знайдемо вирази для спектральної густини  $\Phi(\chi, y)$  в кожній із трьох областей:  $y < 0$ ,  $0 < y < y_0$ ,  $y > y_0$ .

Використовуючи для скорочення запису функцію  $A_+(\chi)$ , щоб не виписувати комплексний інтеграл (6.5a), для спектральної густини  $\Phi(\chi, y)$  отримаємо наступні формули:

$$\begin{aligned} \Phi_I(\chi, y) &= A_+(\chi) e^{y\sqrt{\chi^2 - k^2}}; \\ \Phi_{II}(\chi, y) &= \frac{I_z e^{i\chi x_0}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\chi^2 - k^2}} e^{-y\sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{sh} y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2} + A_+(\chi) e^{-y\sqrt{\chi^2 - k^2}}; \\ \Phi_{III}(\chi, y) &= \frac{I_z e^{i\chi x_0}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\chi^2 - k^2}} e^{-y_0\sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{sh} y \sqrt{\chi^2 - k^2} + A_+(\chi) e^{-y\sqrt{\chi^2 - k^2}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

За допомогою формули звернення інтегрального перетворення Фур'є отримаємо, нарешті, вираз для шуканого векторного потенціалу електричного струму:

$$\begin{aligned}
A_z^{\circ}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{y}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} \right) e^{-i\chi x + y\sqrt{\chi^2 - k^2}} d\chi \quad y > 0; \\
A_z^{\circ}(x, y) &= \frac{I_z^{\circ}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(x-x_0) - y\sqrt{\chi^2 - k^2}}}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{sh} y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2} d\chi + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} \right) e^{-i\chi x - y\sqrt{\chi^2 - k^2}} d\chi \quad y < 0; \\
A_z^{\circ}(x, y) &= \frac{I_z^{\circ}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(x-x_0) - y_0\sqrt{\chi^2 - k^2}}}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{sh} y \sqrt{\chi^2 - k^2} d\chi + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} \right) e^{-i\chi x - y\sqrt{\chi^2 - k^2}} d\chi \quad y < 0.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Розглянемо граничний випадок положення нитки електричного струму  $I_z^{\circ}$ , по суті еквівалентний дифракції плоскої хвилі на півплощині:

$$x_0 = R \cos \theta, \quad y_0 = R \sin \theta. \tag{6.10}$$

У такій задачі виявляється можливим отримати просту формулу для функції  $A_+(\chi)$ , вичисливши інтеграл (6.6) методом перевалу. При  $kR \gg 1$  для функції  $A_+(\chi)$  за допомогою методу перевалу можна отримати наступний вираз:

$$A_+(\chi) = \frac{I_z^{\circ}}{4i} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-ikR + i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{k + k \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\chi - k} (\chi + k \cos \theta)}. \tag{6.11}$$

Множник, поміщений у фігурні скобки. Грає роль амплітуди падаючої хвилі, збудженої нескінченно віддаленим джерелом,

$$-\frac{I_z^{\circ}}{4i} \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-ikR + i\frac{\pi}{4}} = A_0. \tag{6.12}$$

При цьому поле падаючої хвилі описується векторним потенціалом

$$A_{0z}^{\circ} = A_0 e^{ikx \cos \theta + iky \sin \theta}.$$

Використовуючи співвідношення (6.12), для функції  $A_+(\chi)$ , що відповідає дифракції плоскої хвилі, отримаємо вираз

$$A_+(\chi) = \frac{A_0 \sqrt{k + k \cos \theta}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\chi - k} (\chi + k \cos \theta)}. \tag{6.13}$$

Визначивши, таким чином, функцію  $A_+(\chi)$ , розрахуємо поверхневий електричний струм, що збуджується на металевій півплощині падаючою плоскою хвилею.

Поверхнева густина електричного струму  $I_{1z}^3$  на освітленій стороні півплощини кількісно рівна складовій  $H_z$  напруженості магнітного поля і визначається через векторний потенціал наступним чином:

$$J_{1z}^3 = \frac{I_z^3}{2\pi} A_z^3(x, y) \Big|_{y=+0}$$

Диференціюючи по  $y$  третю рівність у формулах (6.13) і вважаючи, що  $y=0$ , отримаємо:

$$J_{1z}^3 = \frac{I_z^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi(x-x_0)-y_0\sqrt{\chi^2-k^2}} d\chi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_+^3(\chi) \sqrt{\chi^2-k^2} e^{-i\chi x} d\chi \quad (6.14)$$

Струм на затіненій стороні півплощини визначається виразом

$$J_{2z}^3 = -\frac{I_z^3}{2\pi} A_z^3(x, y) \Big|_{y=-0}$$

І нескладно отримати:

$$J_{2z}^3 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} A_+^3(\chi) \sqrt{\chi^2-k^2} e^{-i\chi k} d\chi \quad (6.15)$$

При  $x_0$  та  $y_0$  перший із інтегралів у виразі (6.14) можна обчислити, користуючись методом перевалу.

Припустивши  $x_0 = R \cos \theta$ ,  $y_0 = R \sin \theta$ ;  $kR \gg 1$ , отримаємо за допомогою методу перевала:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi(x-x_0)-y_0\sqrt{\chi^2-k^2}} d\chi \simeq \pi k \sin \theta \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{-ikR+i\frac{\pi}{4}} e^{ikx \cos \theta}$$

Використовуючи співвідношення для амплітуди  $A_0$  плоскої хвилі, отримаємо наступну рівність:

$$\frac{I_z^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi(x-x_0)-y_0\sqrt{\chi^2-k^2}} d\chi \simeq -2ki A_0 e^{ikx \cos \theta} \sin \theta \quad (6.16)$$

Перейдемо тепер до обчислення комплексного інтегралу в формулі (6.15), що співпадає, до речі, з другим інтегралом у виразі (6.13). Підставивши вираз (6.12) для  $A_+(\chi)$ , цей інтеграл можна записати в наступному вигляді:

$$J_{2z}^3 = -\frac{A_0}{2\pi} \sqrt{k+k \cos \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi x} \sqrt{\chi+k}}{\chi+k \cos \theta} d\chi = -\frac{A_0}{2\pi} \sqrt{k+k \cos \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi x}}{\sqrt{\chi+k}} d\chi + (k-k \cos \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi x}}{\sqrt{\chi+k}(\chi+k \cos \theta)} d\chi - \frac{A_0}{2\pi} \sqrt{k+k \cos \theta} (S_1 + S_2). \quad (6.17)$$

Інтеграл  $S_2$  є табличним і міститься в довіднику:

$$S_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi x} (\chi + ki)^{-\frac{1}{2}} d\chi = -2 \sqrt{\frac{\pi}{-\chi}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{ikx}. \quad (6.18)$$

Інтеграл  $S_1$  також зводиться до табличного, якщо застосувати перетворення контуру інтегрування. Доповнимо контур інтегрування півколом нескінченного радіусу в верхній півплощині  $\chi$  (рис. 57). Оскільки всередині такого замкненого контуру єдиною особливістю підінтегральної функції являється точка галуження при  $\chi = -k$ , контур інтегрування можна перетворити до двох променів, розташованих по обидві сторони розрізу  $(-k, -k+i\infty)$  (рис.57). Після заміни перемінної інтегрування  $\chi$  за формулою

$$\chi + k = it^2$$

одержимо:

$$S_1 = -4ie^{ikx + \frac{i\pi}{4}} (k - k \cos \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\chi t^2}}{t^2 + i(k - k \cos \theta)} dt.$$

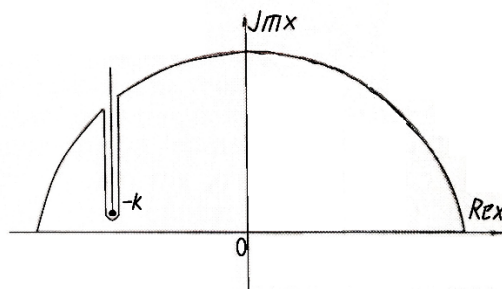


Рис. 57. Контур інтегрування

Цей інтеграл зводиться до інтегралу імовірності комплексного аргументу:

$$S_1 = -2\pi i \sqrt{k - k \cos \theta} \Phi \left( \sqrt{-2kx} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\theta}{2} \right) e^{ikx \cos \theta}. \quad (6.19)$$

Обчисливши, таким чином, інтеграли, що містяться в виразах (6.14) та (6.15), для розподілу поверхневого електричного струму  $J_z^s$  отримаємо наступні формули:

$$J_{1z}^s = -A_0 k i \sin \theta e^{ikx \cos \theta} \left[ \Phi \sqrt{-2kx} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\theta}{2} + A_0 k \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{-\frac{2}{\pi kx}} e^{ikx + i\frac{\pi}{4}} \right]; \quad (6.20)$$

$$J_{2z}^s = A_0 k i \sin \theta e^{ikx \cos \theta} \left[ \Phi \sqrt{-2kx} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\theta}{2} + A_0 k \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{-\frac{2}{\pi kx}} e^{ikx + i\frac{\pi}{4}} \right]. \quad (6.21)$$

Відмітимо, що знайдений розподіл поверхневого струму відповідає дифракції плоскої електромагнітної хвилі, поляризованої паралельно краю півплощини.

На рис. 58 приведено графіки розподілу густини електричного струму на освітленій та затіненій сторонах півплощини. Можна побачити, що струм на освітленій стороні  $J_{1z}^s$  різко змінюється за величиною поблизу краю півплощини. Однак по мірі віддалення від краю осциляції швидко загасають та густина струму практично не відрізняється від подвоєного

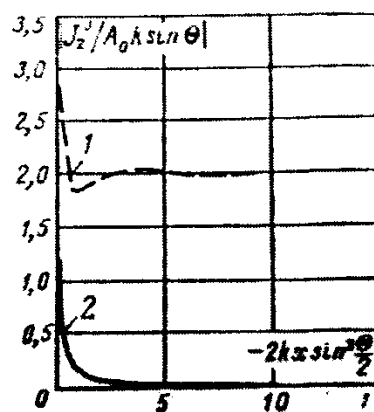


Рис. 58. Розподіл амплітуди струму на півплощині, що збуджується віддаленою ниткою електричного струму

1 – струм на освітленій стороні; 2 – струм на затіненій стороні

значення  $H_t$  падаючої хвилі. Густина струму на затіненій стороні  $J_{2z}^s$  дуже швидко спадає при  $x \rightarrow -\infty$ .

Важливою особливістю розглянутого випадку є збільшення поверхневих густин електричного струму до нескінченності як на освітленій, так і на затіненій



сторонах при  $x \neq 0$ . Це явище називають кромковим ефектом. Воно приводить до концентрації енергії поля поблизу ребра і може викликати поширення вздовж ребра так званих кромкових хвиль.

Розглянемо тепер коротко випадок поперечної поляризації падаючої хвилі, знову застосувавши для розрахунку метод Вінера-Хопфа. Замість нитки електричного струму візьмемо тепер джерело у вигляді нескінченної нитки синфазного магнітного струму  $I_z^M$ . Векторний потенціал магнітного струму буде мати єдину складову  $A_z^M$ , яка задовольняє рівняння, подібне до :

$$\frac{\partial^2 A_z^M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z^M}{\partial y^2} + k^2 A_z^M = -I_z^M \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (6.22)$$

Звичайне диференціальне рівняння для спектральної площини  $\psi(\chi, y)$  функції  $A_z^M(x, y)$  виходить в результаті застосування інтегрального перетворення Фур'є до рівняння (6.21):

$$\frac{\partial^2 \psi(\chi, y)}{\partial y^2} - (\chi^2 - k^2) \psi(\chi, y) = -\frac{I_z^M}{\sqrt{2\pi}} e^{i\chi x_0} \delta(y - y_0) \quad (6.23)$$

Розв'язок рівняння (6.22) по різному записується для кожної із трьох зон  $y < 0$ ,  $0 < y < y_0$ ,  $y > y_0$ :

$$\begin{aligned} \psi(\chi, y)|_{y < 0} &= \psi_I(\chi, y) = A(\chi) e^{y\sqrt{\chi^2 - k^2}}; \\ \psi(\chi, y)|_{y > 0} &= \psi_{II}(\chi, y) = B(\chi) e^{-y\sqrt{\chi^2 - k^2}}; \\ \psi(\chi, y)|_{0 < y < y_0} &= \psi_{III}(\chi, y) = B(\chi) e^{-y\sqrt{\chi^2 - k^2}} + \\ &+ \frac{I_z^M e^{i\chi x_0}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\chi^2 - k^2} (y - y_0) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Із неперервності складової  $E_x$  вектору напруженості електричного поля і, відповідно, похідної  $\partial A_z^M / \partial y$  витікає наступна залежність між  $A(\chi)$  та  $B(\chi)$ :

$$A(\chi) = -B(\chi) + \frac{I_z^M e^{i\chi x_0}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{ch} y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2} \quad (6.25)$$

Введемо тепер, так само як і в попередній задачі, функції  $A_+(\chi)$  і  $A_-(\chi)$ , регулярні відповідно в верхній та нижній півплощинах комплексної змінної  $\chi$ .

Граничні умови

$$\frac{\partial A_z^M}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y=0, x < 0$$

приводить до наступної рівності :

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi(\chi, y) \Big|_{y=0} = A(\chi) \sqrt{\chi^2 - k^2} = A_+(\chi) \quad (6.26)$$

Різниця  $A_z^M(x, y) \Big|_{y=+0} - A_z^M(x, y) \Big|_{y=-0}$  навпаки, рівна нулю при  $x > 0$ . Тому

$$B(\chi) - \frac{I_z^M e^{i\chi x_0}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{sh} y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2} - A(\chi) = A_- \chi \quad (6.27)$$

Виключивши із останнього виразу  $A(\chi)$  і  $B(\chi)$ , за допомогою виразів (6.24) і (6.25) отримаємо функціональне рівняння

$$-2A_+(\chi) + I_z^M e^{i\chi x_0 - y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2}} = A_-(\chi) \sqrt{\chi^2 - k^2} \quad (6.28)$$

Рівняння (6.27) Для функції  $A_+(\chi)$  маємо вираз наступного вигляду:

$$A_+(\chi) = \frac{I_z^M}{2i\sqrt{8\pi^3}} \sqrt{\chi - k} \int_{-ic_1}^{ic_1} \frac{e^{i\alpha x_0 - y_0 \sqrt{\alpha^2 - k^2}}}{\sqrt{\alpha - k} (\alpha - \chi)} d\alpha \quad (6.29)$$

За допомогою функції  $A_+(\chi)$  не складно визначити спектральну густину  $\psi(\chi, y)$ . Шуканий потенціал отримується потім за формулою обернення інтегрального перетворення:

$$\begin{aligned} A_z^M(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_+(\chi)}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} e^{-i\chi x + y \sqrt{\chi^2 - k^2}} d\chi \quad y < 0; \\ A_z^M(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_+(\chi)}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} e^{-i\chi x - y \sqrt{\chi^2 - k^2}} d\chi + \\ &+ \frac{I_z^M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(x-x_0) - y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2}}}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{ch} y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2} d\chi \quad y > 0; \\ A_z^M(x, y) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_+(\chi)}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} e^{-i\chi x - y \sqrt{\chi^2 - k^2}} d\chi + \\ &+ \frac{I_z^M}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(x-x_0) - y_0 \sqrt{\chi^2 - k^2}}}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} \operatorname{ch} y \sqrt{\chi^2 - k^2} d\chi \quad 0 < y < y_0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Перехід до дифракції на півплощині здійснюється віддаленням нитки магнітного струму  $I^M$  на нескінченність за яким-небудь постійним напрямом:

$$x_0 = R \cos \theta; \quad y_0 = R \sin \theta; \quad R \rightarrow \infty, \quad \theta = \text{const}$$

Інтеграл (6.29) при таких значеннях  $x_0, y_0$  обчислюється методом перевалу, і для функції  $A_+(\chi)$  отримують наступну формулу:

$$A_+(\chi) = \frac{I_z^M}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{kR}} e^{-ikR + \frac{i\pi}{4}} \frac{\sqrt{\chi - k} \sqrt{k - k \cos \theta}}{\chi + k \cos \theta} \quad (6.31)$$

Вираз

$$A_0 = -\frac{I_z^M}{4i} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{-ikR + \frac{i\pi}{4}}$$

відповідає амплітуді плоскої хвилі, і  $A_+(\chi)$  для випадку дифракції записується в такому вигляді:

$$A_+(\chi) = \frac{-iA_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\chi - k} \sqrt{k - k \cos \theta}}{\chi + k \cos \theta} \quad (6.32)$$

Щільність поверхневого електричного струму рівна значенню складової  $H_z$  вектору напруженості магнітного поля на півплощині, відповідно, пропорційна  $A_z^M$  при  $y \neq 0$ . На освітленій стороні

$$J_{1x}^o = \frac{k^2}{i\omega\mu_a} A_z^M(x, +0) = \frac{k^2 I_z^M}{2\pi i\omega\mu_a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(x-x_0)-y_0\sqrt{\chi^2-k^2}}}{\sqrt{\chi^2-k^2}} d\chi - \frac{1}{\sqrt{2\pi i\omega\mu_a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_+(\chi)}{\sqrt{\chi^2-k^2}} e^{-i\chi x} d\chi \quad (6.33)$$

На тінювій стороні

$$J_{2x}^o = \frac{k^2}{i\omega\mu_a} A_z^M(x, -0) = \frac{1}{2\pi i\omega\mu_a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_+(\chi)}{\sqrt{\chi^2-k^2}} e^{-i\chi x} d\chi \quad (6.34)$$

В формулі (6.32) перший інтеграл при  $x_0 \neq 0$  і  $y_0 \neq 0$  може бути обчислений методом перевалу та має наступне значення:

$$\frac{k^2 I_z^M}{2\pi i\omega\mu_a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\chi(x-x_0)-y_0\sqrt{\chi^2-k^2}}}{\sqrt{\chi^2-k^2}} d\chi = -\frac{k^2 I_z^M}{2\omega\mu_a} e^{-ikR + \frac{i\pi}{4} + ikx \cos \theta} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} = -\frac{2k^2 A_0}{i\omega\mu_a} e^{ikx \cos \theta}$$

Другий інтеграл в формулі (6.32) [або інтеграл в (6.33)] при підстановці  $A_+(\chi)$  виявляється таким же, як (6.17). Він був обчислений в попередній задачі.

Тому ми одразу напишемо вираз для поверхневих струмів  $J_{1x}^o$  і  $J_{2x}^o$ :

$$J_{1x}^o = \frac{k^2 A_0}{i\omega\mu_a} \left[ \frac{1}{2} + \Phi \left( \sqrt{-2kx} e^{\frac{i\pi}{4}} \sin \frac{\theta}{2} \right) e^{ikx \cos \theta} \right]; \quad (6.35)$$

$$J_{2x}^s = -\frac{k^2 A_0}{i\omega\mu_a} \Phi \sqrt{-2kx} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\theta}{2} e^{ikx \cos \theta} \quad (6.36)$$

Таким чином, формули (6.35) та (6.36) описують розподіл поверхневого електричного струму при дифракції плоскої хвилі на ідеально провідній півплощині у випадку перпендикулярної до краю півплощини поляризації.

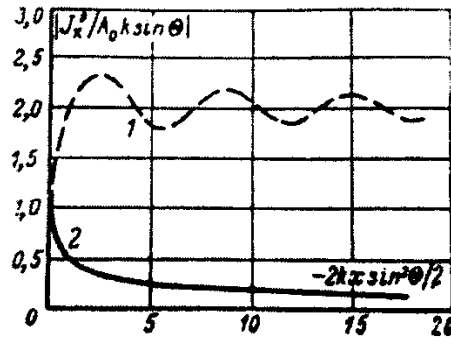


Рис. 59. Розподіл амплітуди струму на півплощині, що збуджується віддаленою ниткою магнітного струму  
1 – струм на освітленій стороні; 2 – струм на затіненій стороні

На рис. 59 представлено графік розподілу амплітуд струмів  $J_{1x}^s$  і  $J_{2x}^s$  на півплощині. Струм на освітленій стороні півплощини осцилює по величині, але при віддалені від краю осциляції швидко загасає і струм практично не відрізняється від подвоєного значення  $H_z$  падаючої хвилі. Відмітимо, що кромковий ефект при перпендикулярній поляризації падаючої хвилі не проявляється.

Щоб перейти від інтегралів імовірності до розкладу в ряд за функціями Бесселя половинного порядку, достатньо скористатись співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \sqrt{-\frac{2}{\pi kx}} e^{ikx+i\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\theta}{2} &= e^{i\frac{\pi}{4}} \left( J_{-\frac{1}{2}}(-kx) - iJ_{\frac{1}{2}}(-kx) \right) \cos \frac{\theta}{2}; \\ \Phi \sqrt{-2kx} e^{i\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\theta}{2} &= 2e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-ikx \cos \theta} \sum_{m=0}^{\infty} J_{m+\frac{1}{2}}(-kx) \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \theta \end{aligned} \quad (6.37)$$

Таким чином, за допомогою формул (6.37) можна переконатись в тому, що розв'язок для півплощини, знайдений методом Вінера-Хопфа, співпадає з загальним розв'язком задачі про збудження ідеально провідного клину.

## ДОДАТОК

### 1. Функція плоскої хвилі, однозначна на поверхні Рімана.

Почнемо з представлення функції плоскої хвилі, однозначної в звичайній площині:

$$u_0 = e^{ikx} \quad (\text{д1.1})$$

у вигляді комплексного інтегралу. Введемо полярні координати  $r, \varphi$ , додамо амплітуду  $A$  і оберемо в якості напрямку падаючої хвилі замість вісі  $x(\varphi = 0)$  довільний напрямок  $\alpha$ , тоді будемо мати:

$$u = A e^{ikr \cos(\varphi - \alpha)} \quad (\text{д1.2})$$

Отримаємо розв'язок хвильового рівняння, якщо будемо вважати  $A$  функцією  $\alpha$  і про інтегруємо яким-небудь чином по  $\alpha$ :

$$u = \oint (a) e^{ikr \cos(\varphi - a)} da. \quad (\text{д1.3})$$

В якості шляху інтегрування оберемо обхід у комплексній площині  $\alpha$  у додатному напрямку навколо точки  $\alpha = 0$ , і оберемо  $A(\alpha)$  так, щоб воно мало в

цій точці полюс першого порядку з лишком (вирахуванням)  $\frac{1}{2\pi i}$ . Тоді, за теоремою Коші, (д1.2) переходить в (д1.1). Оберемо, зокрема, для  $A(\alpha)$  періодичну функцію  $\alpha$  з періодом  $2\pi$ , саме

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - 1}. \quad (\text{д1.4})$$

Обхід навколо нуля можемо деформувати довільним чином, якщо тільки не переходимо через полюси  $A$  функції (тобто через всі точки  $\alpha = \pm 2\pi m$ ,  $m$  – ціле). Якщо хочемо, щоб наш шлях інтегрування прямував до нескінченності, маємо потурбуватись, щоб на нескінченності підінтегральна функція оберталась в нуль на рис. д1 заштриховані ті області, в яких  $\cos(\varphi - \alpha)$  має додатну уявну частину; вони обмежені, як легко перевірити, прямими  $\alpha = \varphi \pm m\pi$  ( $m$  – ціле). В цих заштригованих областях дійсна частина  $i \cos(\varphi - \alpha)$  обертається на нескінченності у від'ємну нескінченність, відповідно, показова функція в (8) обертається в нуль. Позначений на рис. д1 шлях інтегрування складається з двох гілок  $C$ , кожна з яких прямує до нескінченності в двох сусідніх заштригованих областях, із зв'язуючих шляхів  $D$ . Останні обрані таким чином, що вони переходять один в інший при зміщенні на  $2\pi$  і взаємно знищуються у наслідок періодичності підінтегральної функції і протилежності напрямків обходу.

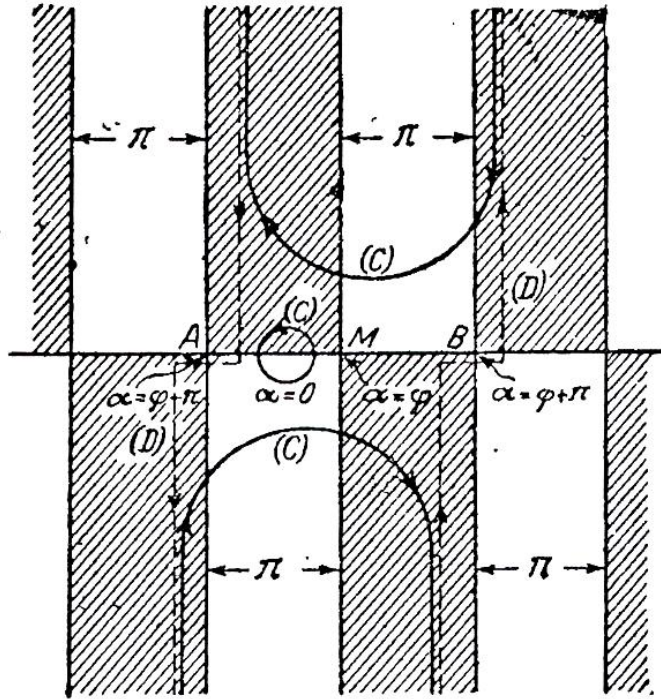


Рис.д1.1 – Шляхи інтегрування комплексного інтегралу

Відповідно, якщо в (д1.4) інтегрувати за двома гілками  $C$ , то цей шлях інтегрування все ще буде еквівалентним обходу навколо  $\alpha=0$  і вираз (д1.4) буде тотожним (д1.3).

Тепер можна безпосередньо здійснити перехід від простої площини до поверхні Рімана з точкою розгалуження порядку  $n$  в  $r=0$ .

Замість (д1.4) покладемо:

$$A(a) = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\frac{ia}{n}}}{e^{\frac{ia}{n}} - 1}, \quad (\text{д1.4a})$$

тобто оберемо  $A$  так, щоб воно мало період і зберігало полюс з лишком  $\frac{1}{2\pi i}$  в точці  $\alpha=0$ . В якості шляху інтегрування візьмемо дві гілки  $C$  (зазначимо: без зв'язуючих ліній  $D$ ). Тепер

$$u = \frac{1}{2\pi n} \oint_{\gamma} \frac{e^{\frac{ia}{n}}}{e^{\frac{ia}{n}} - 1} e^{ikr \cos(\varphi - a)} da. \quad (д1.5)$$

Необхідно показати, що цей вираз задовольняє наступним вимогам:

1)  $u$  задовольняє хвильовому рівнянню  $\Delta u + k^2 u = 0$  в координатах  $r, \varphi$  точки спостереження. Це випливає безпосередньо з того, що ми представили  $u$  у вигляді накладання плоских хвиль;

2)  $u$  всюди скінченне і неперервне. Для  $r > 0$  це випливає з представлення  $u$  у вигляді комплексного інтегралу, що завжди збігається, причому ми завжди можемо уникнути переходу через особливу точку. Тільки точка розгалуження  $r = 0$  потребує особливого розгляду. Для  $r = 0$ , що обумовлює збіжність, показова функція обертається в одиницю; однак, попри це, інтеграл не розходиться; це випливає з того, залишковий інтеграл можна написати, поклавши  $z = e^{\frac{i\alpha}{n}}$ , так:

$$u = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - 1}$$

Це дає при інтегруванні по гілках  $C$  кінцеве значення  $\frac{1}{n}$ . Інша річ похідна  $\frac{\partial u}{\partial r}$ , яка для  $r = 0$  обертається в нескінченність.

3) На поверхні Рімана  $u$  однозначно. Насправді, покладемо в (д1.5)  $\beta = \alpha - \varphi$ ; тоді отримаємо:

$$u = \frac{1}{2\pi n} \oint_{\gamma} \frac{e^{\frac{i\beta}{n}}}{e^{\frac{i\beta}{n}} - e^{-\frac{i\varphi}{n}}} e^{ikr \cos(\beta)} d\beta \quad (д1.5a)$$



тобто вираз, який перетворюється сам в себе, якщо  $\varphi$  збільшується на  $2\pi$ , тобто зробити повний обхід по розгалуженій поверхні. В той час як в рівнянні (д1.5) шлях інтегрування по  $\alpha$  пересувається разом з  $\varphi$ , він залишається незмінним в наступному рівнянні (д1.5а), в силу визначення  $\beta$ ;

4)  $u$  поводить себе на нескінченності на першому листку як плоска хвиля і зникає на нескінченності за всіма останніми листками. Першим називаємо всі точки,  $|\varphi| < \pi$ , другий, третій,  $n$ -ий листки визначаються шляхом нерівності:

$$\pi < \varphi < 3\pi, 3\pi < \varphi < 5\pi, \dots - 3\pi < \varphi < -\pi.$$

Для доведення необхідно тільки ще раз розглянути рис. д1. Якщо знаходимось на першому листку, то полюс  $\alpha=0$  лежить на відрізку  $AB$ ; він, зокрема, співпадають з  $A$  або  $B$ , якщо  $\varphi = +\pi$  або  $-\pi$ .

Коли  $r$  обертається в нескінченність, показовий множник  $e^{ikr \cos(\varphi - \alpha)}$  зникає у всіх точках заштрихованих областей (а не тільки для нескінченності), так як він має там від'ємний дійсний нескінченно великий показник (завдяки множнику  $z$ ). Інтеграл за однією з петель  $C$  (в нашому випадку за петлею, що проходить в додатній півплощині) рівний нулю, т. я. можемо провести шлях інтегрування через точки  $B$  та  $M$  повністю по заштрихованій області. Якщо зробимо те саме з інтегралом по іншому контуру, то шлях інтегрування повисне на полюсі  $\alpha=0$ . Інша частина інтегралу зникає так само і в цьому випадку. Залишається тільки обхід навколо  $\alpha=0$ , який приводить знову до виразу (д1.2), т. я. лишок (д1.3а) рівний  $\frac{1}{2\pi i}$ . Якщо ж, навпаки, знаходимось на одному з решти листків, полюс  $\alpha=0$  не лежить на відрізку  $AB$ . Обидва шляхи інтегрування можна провести повністю по заштригованим областям, і отже, інтеграл рівний нулю. Тому розв'язок  $u$  зникає на нескінченності всіх листків за винятком першого. Відповідно, плоска хвиля, яка розповсюджується в напрямку  $\varphi=0$  в першому листку, не розповсюджується до нескінченності на решті листків, на скінченній же відстані від точки розгалуження її дію можна виявити в цих листках.

**Розв'язання для простору Рімана.**

Нехай простір Рімана має тільки одну пряму необмежену лінію розгалуження, яку обираємо за вісь  $z$ . Нехай цей простір складається з  $n$  екземплярів простору (“листіків”), розташованих таким чином навколо лінії розгалуження, що після  $n$ -кратного обходу навколо неї повернемося в початкову точку.

Якби плоска хвиля падала перпендикулярно до лінії розгалуження (тобто площини  $xu$ ), повернулися б до попереднього двовимірному випадку поверхні Рамана. Тому розглянемо плоску хвилю, нормаль до якої має направляючі косинуси  $\alpha, \beta, \gamma$ . Нерозгалужений розв’язок в простому просторі

буде:

$$(д1.5a) \quad u = e^{ik(ax+\beta y+\gamma z)}.$$

Ведемо полярні координати в площині  $xu$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \alpha = \rho \cos \varphi' \\ y &= r \sin \varphi, \beta = \rho \sin \varphi' \end{aligned} \right\} \rho = \sqrt{1-\gamma^2} > 0.$$

Тоді (д1.6) напишеться так:

$$u_0 = e^{ik[r\rho \cos(\varphi-\varphi')+\gamma z]}.$$

$$(д1.6a)$$

Замінімо тепер (як і в попередньому пункті) кут падіння  $\varphi'$  комплексною змінною інтегрування  $\alpha$  і додамо амплітуду  $A(\alpha)$ , яку визначимо рівнянням (д1.6). Отримаємо:

$$u = e^{ik\gamma z} \int (a) e^{ikr\rho \cos(\varphi-a)} da.$$

$$(д1.6b)$$

Якщо тепер обрати шлях інтегрування як на рис. д1, то (д1.6b) знову перейде в (д1.6a) (з тією несуттєвою різницею, що азимут напрямку падіння  $\varphi'$  рівний нулю), незалежно від того, чи будемо інтегрувати по контуру навколо  $\alpha=0$  або за обома петлями  $C$ .

Здійснимо перехід до  $n$ -кратного простору Рімана, якщо для  $A(\alpha)$  візьмемо вираз (д1.4a). Із (д1.6b) тоді отримаємо:

$$u = \frac{e^{ik\gamma z}}{2\pi n} \oint \frac{e^{\frac{ia}{n}}}{e^{\frac{ia}{n}} - 1} e^{ikr\rho \cos(\varphi - a)} da; \quad (д1.7)$$

Інтегрування необхідно провести за петлями  $C$ , як на рис. д1. Із того, що доданий в показнику множник  $\rho$  має дійсне додатнє значення, впливає, що розділення площини  $\alpha$  на заштриховані і незаштриховані частини залишається попереднім.

Зокрема наш вираз можна привести до вигляду, аналогічному (д1.3а), який явно показує однозначність нашої функції в просторі Рімана і  $n$ -значність в звичайному просторі; це досягається підстановкою  $\alpha - \varphi = \beta$  :

$$u = \frac{e^{ik\gamma z}}{2\pi n} \oint \frac{e^{\frac{i\beta}{n}}}{e^{\frac{i\beta}{n}} - e^{\frac{i\varphi}{n}}} e^{ikr\rho \cos\beta} d\beta. \quad (д1.7а)$$

Звернемося тепер до “функції точки, що світиться”, тобто до розв’язку, який обертається в одній точці в нескінченність. Відповідний нерозгалужений розв’язок буде:

$$U_0 = \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Тут  $R$  виражається через введенні вище полярні координати наступним чином

$$R^2 = r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') .$$

Замінімо  $\varphi'$  на  $\alpha$ , будемо шукати  $R_a$  замість  $R$ ; потім введемо

$$\cos i\rho = \frac{r^2 + r'^2 + (z - z')^2}{2rr'}. \quad (\text{д1.8a})$$

Тоді

$$R_a^2 = 2rr' [\cos i\rho - \cos(\varphi - \alpha)]. \quad (\text{д1.8b})$$

Вираз

$$U = \int_{\alpha}^{\alpha'} (a) \frac{e^{ikR_a}}{R_a} da. \quad (\text{д1.9})$$

Тотожній із первісним виразом для  $U_0$  якщо  $A(\alpha)$  взяти з  $\alpha=0$  (азимут  $\varphi'$  будемо вважати нулем). (д1.5)

Тепер необхідно деформувати цей шлях інтегрування, і тому маємо подивитись, як значення  $R_a$  відображаються на площині  $\alpha$ .

Стверджуємо, що ламана лінія (рис. д2)

$$U \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow V$$

$$\varphi - \pi + i\infty \rightarrow \varphi - \pi \rightarrow \varphi + i\rho \rightarrow \varphi + \pi \rightarrow \varphi + \pi + i\infty$$

відповідає дійсній вісі площини  $R_a$ . Насправді: вздовж прямої  $UA$  маємо  $a = \varphi - \pi + ia$ , де  $\alpha$  дійсне додатне число, тому

$\cos(\varphi - \alpha) = \cos(-\pi + ia) = -\cos ia$  дійсний і від'ємний, відповідно  $R_a^2$ , за (д1.8b), дійсне і додатне, і само  $R_a$ , при підходящому виборі знаку, дійсне та від'ємне.

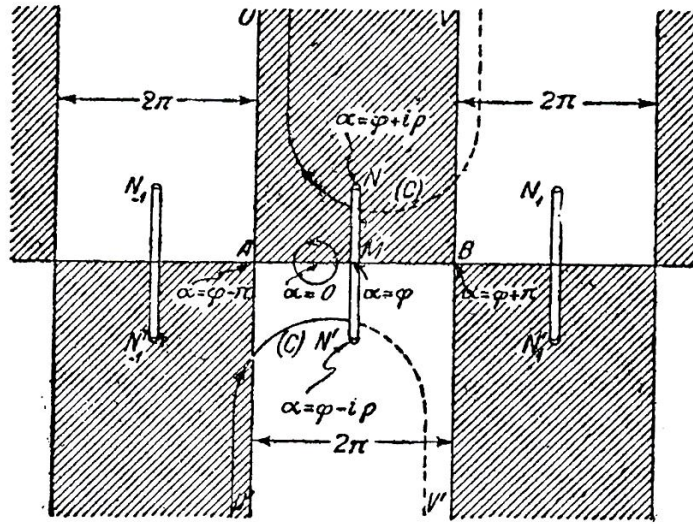


Рисунок д1.2. – Шляхи інтегрування в нових координатах

При переході від  $A$  до  $M$ , при дійсному  $\alpha = \varphi$ ,  $R_a$  залишається дійсним та від'ємним. На відрізку  $MN$ ,  $\alpha = \varphi - i\rho$ . Точка  $N$  відповідає тому значенню  $\alpha = \rho$ , для якого, за (д1.8b),  $R_a$  обертається в нуль.

Якби пішли за  $N$ ,  $R_a^2$  зробилося б від'ємним, відповідно,  $R_a^2$  уявним. Тому, аби йти далі за уявною віссю площини  $R_a$ , маємо в точці  $N$  повернути назад і повернутись в  $M$ . Відрізкам  $NM$ ,  $MB$  і  $BV$  відповідають тоді зростаючі додатні значення  $R_a$ . Заштрихували область площини  $\alpha$ , обмежену ламаною лінією  $UAMNBV$ , щоб показати, що вона відповідає додатно-уявній частині площини  $R_a$ .

Очевидно, що, крім точки  $N(\alpha = \varphi + i\rho)$ , величина  $R_a$  зникає ще в точці  $N'(\alpha = \varphi - i\rho)$  і у всіх точках  $N_1, N_2, \dots, N_{-1}, N_1'$ , які відрізняються від  $N$  і  $N'$  на кратні  $2\pi$ . Відрізки  $NN', N_1N_1', \dots$  служать лініями розгалуження  $R_a$ . При переході через них, так само як при переході через нашу ламану лінію в будь-якому іншому місці, переходимо з додатної у від'ємну півплощину площини  $R_a$  чи навпаки. Отже, нашу площину  $\alpha$  необхідно в свою чергу представляти собі як дволисну поверхню Рімана відповідно двом значенням  $\pm R_a$ . Ті області представленого на рис. д2 верхнього листка, які не заштриховані і відповідають від'ємно уявній площині  $R_a$ , будуть заштриховані в нижньому листку, так як там вони відповідають додатно

уявному  $R_a$  і навпаки. На нашому кресленні пунктиром позначені ті криві, які проходять в нижньому листку, суцільні криві проходять у верхньому листку.

Тепер достатньо підготовлені для того, щоб деформувати вгору і вниз наш початковий контур, проведений навколо  $a=0$ . Наш шлях інтегрування має там, де він прямує до нескінченності верхньому (нижньому) листку проходить по штрихованій (нештрихованій) області, так як тільки в цьому випадку показникова функція  $e^{ikR_a}$  зникає; а це необхідно і достатньо для збіжності інтеграла. Цій умові задовольняють дві петлі  $C$ , які разом з непозначеними на рисунку і контурами  $U \rightarrow U' \text{ та } V \rightarrow V'$ , які взаємознищуються, еквівалентні початковому контуру. Так як при деформуванні контуру неможна перетинати точок розгалуження, обидва шляхи повинні переходити через переріз  $NN'$ , при цьому вони переходять в нижній листок і далі позначені пунктиром.

Перехід від простого до  $n$ -кратного простору Рімана тепер дуже простий. Представимо в (д1.9) для  $A(\alpha)$  попередній вираз (д1.4а) і збережемо шлях інтегрування, який складається з двох петель  $C$ . Отримана таким чином функція:

$$U = \frac{1}{2\pi n} \oint \frac{e^{\frac{ia}{n}}}{e^{\frac{ia}{n}} - 1} \frac{e^{ikR_a}}{R_a} da \quad (д1.10)$$

задовольняє наступним умовам:

1. Вона задовольняє хвильовому рівнянню  $\Delta U + k^2 U = 0$  [як будь-який вираз виду (д1.9) з довільним  $A(\alpha)$ ].

2.  $U$  скінченне і неперервне для всіх положень точки спостереження  $P$ , крім того випадку, коли точка  $P$  і джерело співпадають, тобто коли

$$r=r', z=z', \varphi=\varphi'=0. \quad (д1.11)$$

Перша частина цього твердження зрозуміла сама собою, так як  $U$  подається у вигляді збіжного комплексного інтеграла і, загалом, можемо завжди провести шлях інтегрування так, що він не проходитиме через полюс  $\alpha=0$ . Друга частина твердження випливає з того, що петлі  $C$  зобов'язані проходити між  $N$  і  $N'$ .

Коли  $r=r'$  і  $z=z'$ , а отже  $\rho=0$ , то обидві точки розгалуження  $NN'$  попадають в  $M$ . Обидві петлі  $C$  проходять тоді через  $M$ . Інтеграл і тут не обертається в нескінченність, якщо одночасно  $\varphi$  не дорівнює нулю.

Так як точка  $M$  визначена з умови  $\alpha=\varphi$ , то для  $\varphi=0$  в точці  $M$  буде також і  $\alpha=0$ , тобто в точку  $M$  потрапляє також і полюс підінтегральної функції, а шляхи інтегрування  $C$  необхідно проходять через полюс.

Треба підкреслити, що при цьому виводі обов'язково допускається, що  $\varphi=0$  (чи рівне кратному). Навпаки, навіть якщо і буде  $r=r', z=z'$ , але  $\varphi=2\pi, 4\pi, \dots$  або  $2\pi(n-1)$ , полюс  $\alpha=0$  не буде співпадати з точкою  $M$ , визначеною умовою  $\varphi=\alpha$ . Петлі  $C$ , які проходять через  $M$  не проходять через полюс і інтеграл не робиться нескінченним. Це можна виразити ще так: наше джерело  $Q(\varphi'=0)$  лежить в першому листку нашого простору Рімана. Функція

$U$  обертається в нескінченність тільки для  $P=Q$  в першому листку і залишається скінченною в точках  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ , які лежать в тому ж місці в інших листках. Те, що вона в  $P=Q$  робиться нескінченною як раз так, як  $U_0$ , можна побачити з рівняння (д1.6). Саме, так як тут  $U(P, Q), U(P_{n-1}, Q)$  скінченні,  $U(P, Q)$  має обертатись в нескінченність так само, як  $U_0$ .

Рівняння (д1.1) можна, очевидно, перевірити таким самим чином, як це зроблено на рис. д2:  $n$  пар петель, які лежать поряд та зміщені одна відносно одної на  $\pi$ , доповнюються до замкнутого обходу біля полюсу  $\alpha=0$ .

3. Однозначність  $U$  в  $n$ -кратному просторі Рімана випливає з побудови нашої формули і стає очевидною після підстановки  $\alpha-\varphi=\beta$ , як в рівнянні (д1.7).

4. При  $r=\infty$ ,  $U$  зникає в 2-му, 3-му, ...,  $(n-1)$ -му листках простору Рімана ( $|\varphi|>\pi$ ), як зараз буде показано. Після цього з (д1.11), випливає, що воно зникає так само і в першому листку ( $|\varphi|\leq\pi$ ), так як в рівнянні (д1.11) при  $r=\infty$ , крім  $U(P_1, Q), \dots, U(P_{n-1}, Q)$ , обертається в нуль так само і перша частина  $U_0(P, Q)$ . Для доведення першого положення підкреслимо, що всюди, де на рис. д2  $P$  має додатну уявну частину,  $e^{ikR_0}$  обертається в нуль при  $r=\infty$ . Внаслідок цього в заштрихованих областях випадають суцільні ділянки шляху ( $C$ ), а в незаштригованих – пунктирні. Але можемо провести петлі ( $C$ ) таким чином, що їх суцільні ділянки будуть проходити тільки по заштригованих областях, а їх пунктирні ділянки – тільки по незаштригованих. Для цього

достатньо відтягнути верхню петлю вниз настільки, щоб вона проходила через  $M$  і  $B$  і нижню петлю підняти догори, щоб вона проходила через  $M$  і  $A$ . При цьому полюс  $\alpha=0$  завадити не зможе, оскільки, за припущенням

$$(|\varphi| < \pi), \quad (д1.12)$$

і відповідно, він лежить за межами відрізка  $AB$ .

Перехід до граничного випадку простору нескінченної кратності ( $n=\infty$ ) можна провести в кожному з рівнянь (д1.7) і (д1.10).

## 2.Рішення рівняння Лапласа в циліндричних координатах. Рівняння Бесселя.

Рівняння Лапласа в циліндричних координатах має наступний вигляд:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

(д2.1)

Будемо шукати рішення цього рівняння методом Фур'є, маючи на увазі, що шукана функція  $U(\rho, \varphi, z)$  залежить від трьох змінних.

Покладемо, що

$$U(\rho, \varphi, z) = V(\rho, z) \Phi(\varphi) \quad (д2.2)$$

і підставимо цей добуток в (1). Тоді 
$$\frac{\Phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} V \Phi'' + \Phi \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Якщо отримане рівність помножити на  $\frac{\rho^2}{V \Phi}$  та член, що залежить від  $\varphi$ , перенести вправо, то прийдемо до рівності:

$$\frac{\rho}{V} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\rho^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = - \frac{\Phi''}{\Phi(\varphi)}.$$

Але рівність двох функцій від різних аргументів можливо тоді і тільки тоді, коли обидві вони рівні одній і тій ж постійною. Позначаючи цю постійну через  $\nu^2$ , отримуємо два рівняння:



$$\frac{\rho}{V} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dV}{d\rho} \right) + \frac{\rho^2}{V} \frac{d^2 V}{d\rho^2} = v^2 \quad (д2.3)$$

$$\Phi'' + v^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (д2.4)$$

Оскільки (д2.3) є рівнянням у частинних похідних, то застосуємо до нього метод Фур'є з метою розділення змінних. Отже, нехай

$$V(\rho, z) = R(\rho) Z(z). \quad (д2.5)$$

Ділячи (3) на  $\rho^2$  і підставляючи в нього (5) приходимо знову до рівності:

$$\frac{Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') - \frac{v^2}{\rho^2} RZ + RZ'' = 0$$

Ділимо далі на добуток  $RZ$  і переносимо вправо член, що залежить від  $Z$ :

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} (\rho R') - \frac{v^2}{\rho^2} = -\frac{Z''}{Z(z)}$$

Отримали рівність двох функцій від різних аргументів. Прирівнюючи обидві частини цієї рівності постійної  $\lambda^2$ , отримуємо два звичайних диференціальних рівняння:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') + \frac{\lambda^2}{\rho^2} R - \frac{v^2}{\rho^2} R = 0 \quad (д2.6)$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0 \quad (д2.7)$$

Ясно, що сукупність рівнянь (д2.4), (д2.6) і (д2.7) еквівалентна вихідному рівнянню Лапласа (д2.1) і дозволяє в принципі визначити функції  $\Phi(\varphi)$ ,  $R(\rho)$ ,  $Z(z)$ , а отже, і шукану функцію  $U$ , яка згідно (д2.2) і (д2.5) дорівнює:

$$U(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z) \quad (д2.8)$$

Оскільки диференціальні рівняння (д2.4) і (д2.7) є добре відомими лінійними і однорідними рівняннями другого порядку, то їх спільні рішення можна відразу ж написати:

$$\Phi(\varphi) = A \cos v\varphi + B \sin v\varphi, \quad (д2.9)$$

$$Z(z) = C \operatorname{ch} \lambda z + D \operatorname{sh} \lambda z \quad (д2.10)$$

Таким чином, завдання зводиться, до вирішення диференціального рівняння (д2.6) зі змінними коефіцієнтами. Його, очевидно, можна представити так:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (д2.6')$$

Якщо ввести нову незалежну змінну  $x = \lambda\rho$ , то (д2.6 ') дещо спрощується і приймає форму так званого рівняння Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (д2.11)$$

Інтеграли цього рівняння  $R_\nu(x)$  називаються *циліндричними функціями* або *функціями Бесселя*.

Перейдемо тепер до розгляду методів визначення рішення рівняння (д2.11).

Запишемо рівняння Бесселя у вигляді:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (д2.12)$$

і будемо шукати його рішення у формі ряду:

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}. \quad (д2.13)$$

Перша і друга похідні цього ряду запишуться так:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s) x^{k+s-1}, \quad (д2.13')$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s)(k+s-1) x^{k+s-2}. \quad (д2.13'')$$

Помножимо (д2.13) на  $\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)$  і (13 ') - на  $\frac{1}{x}$  і отримані вирази разом з (д2.13 ") підставимо в (д2.12):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s-2} [(k+s)(k+s-1) + (k+s) - \nu^2] = 0.$$

Зробивши скорочення на  $x^{s-2}$  та спрощення у квадратних дужках, перетворимо цю тотожну рівність наступним чином:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k [(k+s)^2 - \nu^2].$$

Ряд зліва починається з  $x^2$ , а ряд справа - с  $x$  в нульовій степені. Звідси випливає, що коефіцієнти перед  $x^0$  і  $x^1$  дорівнюють нулю:

$$a_0(s^2 - \nu^2) = 0, \quad (д2.14)$$

$$a_1[(1+s)^2 - \nu^2] = 0. \quad (д2.14')$$

Що стосується коефіцієнтів при більш високих степенях  $x$ , то вони повинні задовольняти рекурентну рівність:

$$a_{k-2} = -a_k[(k+s)^2 - \nu^2], \quad (д2.15)$$

де  $k = 2, 3, \dots$ .

З (д2.14) випливає, що  $s = \pm \nu$  і  $a_1 = 0$ . Покладемо спочатку, що  $a = +\nu$ , тоді згідно (д2.15)

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \quad (д2.15')$$

де  $k = 2, 3, \dots$ . Оскільки  $a_1 = 0$ , то і всі наступні непарні коефіцієнти

$a_3, a_5, a_7, \dots$  також дорівнюють нулю.

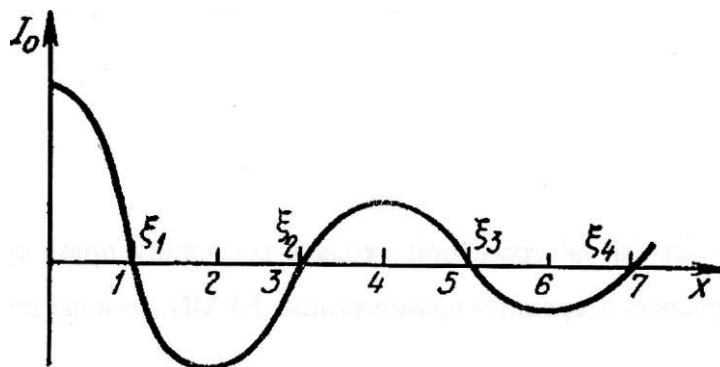


Рис. д2.1. Функція Бесселя

Що стосується парних коефіцієнтів, то їх легко виразити через  $a_0$  за формулою (д2.15 '):

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2^4(1+\nu)(2+\nu)},$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(1+\nu)(2+\nu)\dots(k+\nu)}. \quad (\text{д2.16})$$

Підставляючи (16) в (13), отримуємо часткове рішення рівняння Бесселя (д2.12):

$$y_1(x) = I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k} k!(1+\nu)(2+\nu)\dots(k+\nu)}. \quad (\text{д2.17})$$

За допомогою ознаки збіжності Даламбера можна показати, що ряд (д2.17) сходиться при будь-яких значеннях  $x$ . Характеризуєма їм функція  $I_\nu(x)$  називається *бесселевою функцією першого роду порядку  $\nu$* .

Бесселеві функції першого роду  $I_\nu(x)$  добре вивчені, для них складені таблиці.

При  $x \gg 1$  функцію Бесселя можна замінити її асимптотичною формулою:

$$I_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{д2.18})$$

з якої видно, що для великих  $x$  крива  $I_\nu(x)$  приблизно уявляє собою загасаючу косинусоїду (на рисунку д2.1. наведено графік бесселевої функції нульового порядку). Ясно, що функції  $I_\nu(x)$  мають безліч коренів  $\xi_k^{(\nu)}$  (де  $k=1,2,\dots$ ), для яких  $I_\nu(\xi_k^{(\nu)})=0$ .

Отже, функція Бесселя першого роду  $I_\nu(x)$  є одним частковим рішенням  $y_1(x)$  рівняння (12). Щоб написати його спільне рішення, потрібно знати другий лінійно-незалежний частковий розв'язок  $y_2(x)$ . У теорії Бесселевих функцій показується, що в тому випадку, коли параметр  $\nu$  є не цілим числом, цей другий частковий розв'язок можна отримати, поклавши  $s = -\nu$ :

$$y_2(x) = I_{-\nu}(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k} k!(1-\nu)(2-\nu)\dots(k-\nu)}. \quad (\text{д2.17'})$$

Це теж бесселева функція першого роду, але від'ємного порядку, її графік подібний затухаючій косинусоїді. У разі нецілочисельного  $\nu$  загальний інтеграл рівняння Бесселя має вигляд:

$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_\nu(x). \quad (\text{д2.19})$$

Однак, якщо  $\nu$  є ціле число ( $\nu = n$ ), то функція  $I_{-n}(x)$  відрізняється від  $I_n(x)$  тільки постійним множником  $(-1)^n$ . Іншими словами,  $I_{-n}(x)$  і  $I_n(x)$  лінійно-залежні і з них загальний інтеграл не можна скласти.

У цьому випадку в якості другого незалежного часткового рішення вибирають функцію Бесселя другого роду  $Y_n(x)$ , яку ще називають *функцією Неймана*.

Ми не будемо строго виводити вираз для  $Y_n(x)$ , а обмежимося її асимптотичною формулою, справедливою при  $x \gg 1$ :

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{д2.20})$$

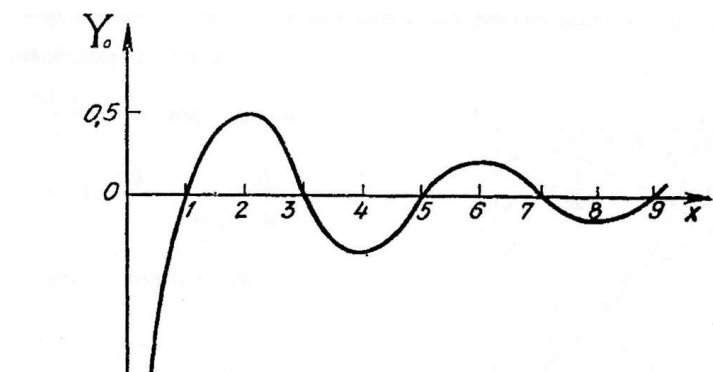


Рис. д2.2 Функція Неймана.

Припустимо, що в рівнянні коливань залежність від часу абсолютно періодична і представлена в найбільш зручному вигляді за допомогою множника

$$e^{-i\omega t}, \text{ де } \omega - \text{кутова частота} \quad (\text{д2.20})$$

За допомогою позначення

$$k = \frac{\omega}{c}, \text{ де } k - \text{хвильове число}, \quad (\text{д2.21})$$

І при збереженні попереднього позначення  $u$  у випадку з одним чи двома вимірами приймає наступне значення:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0, \quad (д2.22а)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0. \quad (д2.22б)$$

Рішення рівняння (д2.22а) є функції

$$u = Ae^{ikx} \text{ і } u = Be^{-ikx}. \quad (д2.23а)$$

При виборі від'ємного знаку в рівнянні (д2.20) перша функція визначає плоску хвилю, що поширюється в позитивному, а друга – плоску хвилю, що поширюється в від'ємному напрямленні осі  $x$ . То обставина, що зручніше мати справу з хвилею, що розповсюджується в позитивному напрямі осі  $x$ , є основною причиною вибору знака в рівнянні (д2.20).

В двовірному випадку, якому відповідає рівняння (д2.22б), при тому ж виборі знаку в рівнянні (20) отримаємо

$$u = Ae^{i(ax+by)}; \quad a^2 + b^2 = k^2, \quad \begin{cases} a = k \cos \alpha, \\ b = k \sin \alpha. \end{cases} \quad (д2.23б)$$

Якщо ввести полярні координати  $r, \varphi$ , вважаючи

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

То отримаємо

$$u = Ae^{ikr \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (д2.24)$$

Обумовлена формулою (д2.24) функція  $u$  являє собою плоску хвилю, яка поширюється в напрямку  $\varphi = \alpha$ . При  $\alpha = 0$  отримаємо, звісно, знову хвилю (д2.23а). З таких плоских хвиль можна побудувати загальне рішення рівняння (д2.22б) за допомогою додавання (інтегрування) по  $\alpha$  з коефіцієнтами  $A$ , які при цьому можуть залежати від  $\alpha$ .

В змінних  $r, \varphi$  рівняння (д2.22б) має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0 \quad (д2.25)$$

Або, допускаючи  $\rho = kr$ ,

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta u}{\Delta \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Delta^2 u}{\Delta \varphi^2} + u = 0 \quad (д2.25а)$$

Шукаємо рішення цього рівняння, яке приймає вигляд

$$u = Z_n(\rho) e^{in\varphi} \quad (д2.26)$$

Причому множник  $Z_n(\rho)$  будемо звати циліндричною функцією.

Для знаходження виду цієї функції, припустимо, що в формулі (д2.26)  $A$  дорівнює показовій функції від  $\alpha$ ; нехай

$$A = c_n e^{in\alpha}$$

Де  $c_n$  -- постійна, не залежна від  $\alpha$ . Інтегруючи по  $\alpha$  в відповідних межах  $\beta$  і  $\gamma$ , отримаємо

$$u = c_n \int_{\beta}^{\gamma} e^{i\rho \cos(\varphi - \alpha)} e^{in\alpha} d\alpha \quad (д2.27)$$

На відміну від функції виду (д2.24), функція виду (д2.27) представляє не одну плоску хвилю, яка поширюється в напрямку  $\alpha$ , а пучок плоских хвиль, напрямок розповсюдження яких змінюється від  $\alpha = \beta$  до  $\alpha = \gamma$ . Очевидно, що функції  $u$  виду (д2.27) задовольняють диференційному рівнянню (д2.25а).

Задаймося ціллю вибрати  $\beta$  та  $\gamma$  такими, щоб рішення вигляду (д2.27) прийняло форму (д2.26), тобто допускало виділення множника  $e^{in\varphi}$ .

Для цього допустимо

$$\alpha = \omega + \varphi, \quad \omega_0 = \beta - \varphi, \quad \omega_1 = \gamma - \varphi. \quad (д2.27а)$$

Формула (27) приймає після цього вигляд

$$u = c_n \int_{\omega_0}^{\omega_1} e^{i\rho \cos \omega} e^{in\omega} d\omega e^{in\varphi}. \quad (д2.28)$$

Множник при  $e^{in\varphi}$  в формулі (д2.28) буде функцією від одного  $\rho$ , як цього вимагає формула (д2.26), якщо буде знову усунена шляхом штучного прийому залежності границь інтеграла  $\omega_0$  та  $\omega_1$  від  $\varphi$ . Для того щоб при будь-

якому значенні  $n$  границі інтеграла (д2.28) не залежали від  $\varphi$ , необхідно відповідно до формул (д2.27а) змусити  $\beta$  та  $\gamma$ , а разом з тим  $\omega_0$  та  $\omega_1$ , прямувати до нескінченності по відповідному закону. Для того щоб мати можливість здійснити такий граничний перехід, необхідно, передусім дослідити збіжність інтеграла (д2.28) на нескінченності. Задача, очевидна, зводиться до визначення тих областей комплексної змінної  $\omega$ , в яких показник  $i\rho \cos \omega$  першого множника підінтегральної функції в виразі (д2.28) має від'ємну дійсну частину.

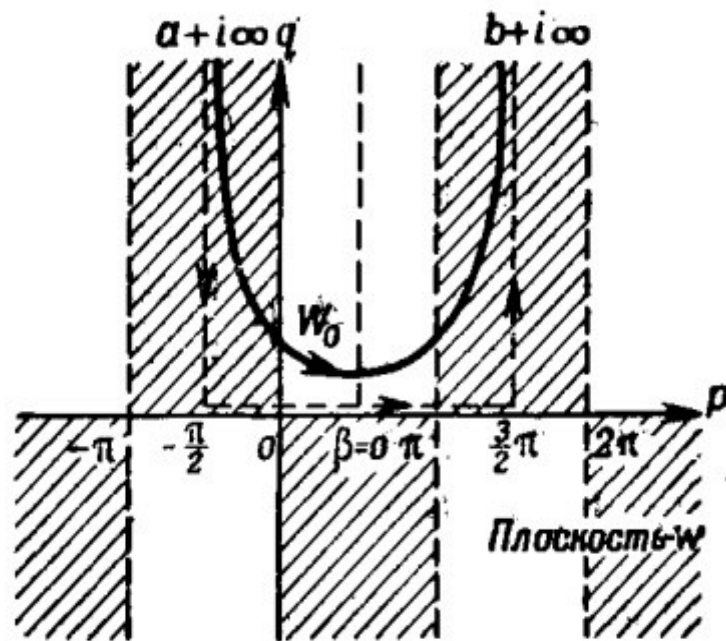


Рис.д2.3. На рисунку заштриховані області 'площини'  $\omega = p + iq$ , в яких дійсна частина функції  $i\rho \cos \omega$  від'ємна.

Припустимо спочатку, що аргумент  $\rho$  функції  $u$  – дійсне і додатне число.

Якщо  $\omega = p + iq$ , то  $\text{Re}(i \cos \omega) = \sin p \sinh q$ . Тому на верхній напівплощині  $\omega$ , тобто при  $q > 0$ , має виконуватись умова  $\sin p < 0$ ,  
 $-\pi < p < 0 \pmod{2\pi}$ , (д2.29а)



$$\sin p > 0,$$

а при  $q < 0$ , тобто на нижній напівплощині  $\omega$ ,  $0 < p < \pi \pmod{2\pi}$ .  
(д2.29б)

(Знак  $\pmod{2\pi}$  читається «за модулем  $2\pi$ » і вказує на те що відповідний інтервал може бути зсунений на ціле кратне  $2\pi$  в додатню чи від'ємну сторону). Оскільки умова (д2.29а) і (д2.29б) накладаються лише на дійсну частину  $P$  змінної  $\omega$  і не містять  $q$ , то шукані області являються смугами, паралельними уявній осі. Ці смуги, в яких повинні лежати границі  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  інтеграла (д2.28), заштриховані на рис.д2.3. і розміщені в шаховому порядку.

Якщо  $\rho$  не дійсне і додатне, а комплексне число, рівне  $|\rho|e^{i\Theta}$ , то картина смуг в цілому залишається такою ж, зсуваючись лише на  $\frac{\pi}{2}$  вздовж дійсної осі, причому знак «+» відноситься до верхньої, а знак «-» до нижньої півплощини  $\omega$

При будь-якому виборі границь інтегрування  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ , які задовольняють попередні умови, множник при  $e^{in\varphi}$  в формулі (д2.28) являє собою відповідний частковий вид загальної циліндричної функції  $Z_n(\rho)$ , яка визначається формулою (д2.26), і задовольняє диференціальному рівнянню:

$$\frac{d^2 Z_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ_n}{d\rho} + \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{\rho^2} Z_n = 0, \quad (д2.30)$$

Яке виходить в результаті підстановки виразу (д2.27) в рівняння (д2.25а).

1. Функції Бесселя та їх інтегральне подання.

В якості першого випадку розглянемо наступні значення границь інтегрування:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= a + i\frac{\pi}{2}, \quad -\pi < a < 0, \\ \omega_1 &= b + i\frac{\pi}{2}, \quad \pi < b < 2\pi. \end{aligned} \quad (д2.31)$$

Відповідний тип шляху інтегрування представлений на рис.д2.3 буквою  $W_0$ ; циліндрична функція, яка при цьому отримується, називається функцією

Бесселя, якщо тільки множник  $c_n$ , що являється невизначеним у формулі (д2.28), обрати наступним чином:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} e^{-in\pi/2} \quad (\text{д2.32})$$

Використовуючи загальне позначення  $I_n$ , отримуємо

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \oint_{W_0} e^{i\rho \cos \omega} e^{in(\omega-\pi/2)} d\omega. \quad (\text{д2.33})$$

Нормування за формулою (д2.32) вибрано таким чином, що, з одного боку,  $I_0(\rho) = 1$  для  $\rho = 0$ , з іншого боку  $I_n(\rho)$  для будь-яких дійсних  $n$  та  $\rho$  є дійсним. Перша умова витікає безпосередньо з формули (д2.33), якщо перейти до прямокутної форми шляху інтегрування, показаної штрихом на рис.д2.3., так що при цьому взаємно компенсуються обидві частини інтегралу, взяті по прямим, паралельним уявній осі  $\omega$  (взяті, окремо, вони розходяться при  $\rho \neq 0$

). Друга умова легко доводиться, якщо застосувати заміну змінної  $\omega - \frac{\pi}{2} = \beta$ .

Якщо знову вибрати в якості шляху інтегрування  $W_0$  вищевказаний прямокутний шлях, який при переході до змінної  $\beta$  повинен бути записаний наступним чином:

$$-\pi + i\epsilon \rightarrow -\pi \rightarrow \pi \rightarrow \pi + i\epsilon$$

То цей шлях буде симетрично розміщений відносно уявної осі  $\beta$ :  $I_n(\rho)$  розкладається тоді, при дійсних  $\rho$  та  $n$ , на дві дійсні складові частини:

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n\beta - \rho \sin \beta)} d\beta - \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^\epsilon e^{-(n\gamma + \rho \sinh \gamma)} d\gamma, \quad (\text{д2.34})$$

З яких друга отримується з інтегралу, взятого двома способами  $\pi \rightarrow \pi + i\epsilon$  та  $-\pi + i\epsilon \rightarrow -\pi$  за допомогою подальшої заміни  $\beta = \epsilon\tau + i\gamma$ , і при нецілому значенні  $n$  не стає нулем. Таким чином, при нашому нормуванні, згідно з формулою (д2.33),  $I_n(\rho)$  є дійсним, якщо  $\rho$  та  $n$  дійсні.

Оскільки інтегральне представлення (д2.33) сходиться для всіх значень  $\rho$ , то звідси випливає, що  $I_n(\rho)$  є *регулярною трансцендентною функцією*, яка тільки в нескінченності має суттєву особливу точку, а при  $\rho = 0$  має точку розгалуження порядку  $n$ , яка при від'ємному  $n$  є також точкою, де функція прямує до нескінченності того ж порядку.

Якщо  $n$  -- ціле число, що ще не припускалось, то другий доданок у формулі (34) стає нулем і отримаємо:

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n\beta - \rho \sin \beta)} d\beta. \quad (д2.35)$$

Якщо перейти від показникової функції до тригонометричної і взяти до уваги, що синус непарна функція, косинус – парна функція  $\beta$ , то отримаємо вираз, вказаний Бесселем, а саме:

$$I_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\rho \sin \beta - n\beta) d\beta. \quad (д2.36)$$

До такого ж висновку приходимо, виходячи з нашого вихідного інтегралу по  $\omega$ ; при інтегруванні по  $W_0$  взаємно знищуються частини інтегралу, які відповідають прямим, що паралельні уявній осі, і залишається тільки інтеграл вздовж відрізка дійсної осі площини  $\omega$  від  $-\pi/2$  до  $3\pi/2$ , який, внаслідок періодичності підінтегрального виразу, може бути замінений інтегралом від  $-\pi$  до  $+\pi$ . Таким чином отримуємо

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\rho \cos \omega} e^{in(\omega - \pi/2)} d\omega, \quad (д2.37)$$

У відповідності з формулою (д2.37). У порівнянні з цими дійсними представленнями наш інтеграл (д2.33) з його комплексним шляхом  $W_0$  має суттєву перевагу, що він зберігає силу для будь-яких  $n$ , а не тільки цілих.

Оскільки рівняння (д2.30) залежить тільки від  $n^2$ , то нарівні з  $I_n$  його рішенням є також  $I_{-n}$ . Тому його загальне рішення може бути записане у вигляді:

$$Z_n(\rho) = c_1 I_n(\rho) + c_2 I_{-n}(\rho). \quad (\text{д2.38})$$

Це, однак, є вірним тільки для нецілого  $n$ . При цілому  $n$  рішення  $I_n$  та  $I_{-n}$  являються лінійно залежними, оскільки тоді маємо:

$$I_{-n}(\rho) = (-1)^n I_n(\rho). \quad (\text{д2.38a})$$

Це співвідношення випливає безпосередньо з формули (д2.35), якщо в  $I_{-n}(\rho)$  зробити підстановку:

$$\beta = \pi - \alpha$$

### 3. Ейлерова функція гама

Ейлерова функція гама визначається інтегралом

$$\Gamma(v) = \int_0^\infty x^{v-1} e^{-x} dx,$$

маючий сенс при великому додатному  $v$ .

Інтегруючи першу частину по частинах знаходимо важливу формулу:

$$\Gamma(v+1) = v \Gamma(v).$$

Замінив в ній число  $v$  числами  $v+1, v+2, \dots, v+k$ ,

і перемноживши загальні отриманні результати, отримаємо необхідні властивості функції гама:

$$\Gamma(v+k+1) = (v+1)(v+2)\dots(v+k)\Gamma(v+1).$$

Прийmemo в отриманій формулі  $v$  рівну нулю, знайдемо в силу рівності:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

інша важлива властивість функції гама, що виражається рівністю:

$$\Gamma(k+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k = k!,$$

де  $k$ - ціле додатне число.

Із рівняння

$$\Gamma(m) = \frac{\Gamma(m+1)}{m}$$

витікає, що:

$$\Gamma(0) = +\infty, \quad \Gamma(-1) = -\infty, \quad \Gamma(-2) = +\infty, \quad \text{і т.д.}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

### Функціональні рівняння

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z),$$

$$\Gamma(z) \Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + z \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - z \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)},$$

$$\Gamma(nz) = \sqrt{\frac{n^{2nz-1}}{(2\pi)^{n-1}}} \Gamma(z) \Gamma\left(\frac{2z}{n}\right) + \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{2z}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2z}{n}\right) + \frac{2}{n} \Gamma\left(\frac{2z}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2z}{n}\right) + \frac{n-1}{n} \Gamma\left(\frac{2z}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2z}{n}\right) \quad (n=2,3,\dots).$$

## 4. Різні типи циліндричних функцій

### 4.1 Функція Ханкеля.

Поряд з функцією Бесселя першого роду  $J_\nu x$  велике значення для програм мають інші спеціальні види рішень рівнянь Бесселя. До їх числа відносяться насамперед функції Ханкеля першого і другого роду  $H_\nu^{(1)}(x)$  і  $H_\nu^{(2)}(x)$ , що є комплексно-сполученими рішеннями рівняння Бесселя. З погляду фізичних програм основною характеристикою функцій Ханкеля є асимптотичну поведінку при великих значеннях аргументу. Тому визначимо функції Ханкеля як циліндрові функції, що володіють наступною асимптотикою:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(\frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \dots, \quad (д3.1)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \dots, \quad (д3.2)$$

де точками позначені члени більш високого порядку малості відносно  $1/x$ . Умови (1), (2) визначають  $H_\nu^{(1)}$  і  $H_\nu^{(2)}$  однозначно. Поділяючи дійсну та уявну частини, уявімо функцію Ханкеля у вигляді

$$H_v^{(1)}(x) = J_v(x) + iN_v(x), \quad (д3.3)$$

$$H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - iN_v(x), \quad (д3.4)$$

де функція

$$J_v(x) = \frac{1}{2} [H_v^{(1)}(x) + H_v^{(2)}(x)] \quad (д3.3')$$

$$N_v(x) = \frac{1}{2i} [H_v^{(1)}(x) - H_v^{(2)}(x)] \quad (д3.4')$$

мають асимптотичний характер

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4} + \dots, \quad (д3.5)$$

$$N_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4} + \dots, \quad (д3.6)$$

що виходить із формул (д3.1) і (д3.2).

Введена тут функція  $J_v(x)$  є функцією Бесселя першого роду. Уявна частина  $N_v(x)$  функції Ханкеля називається функцією Неймана або циліндричної функцією другого роду  $v$ -го порядку.

Формули (д3.3) і (д3.4) встановлюють зв'язок між функціями Ханкеля, Бесселя і Неймана, аналогічну зв'язку між показовою функцією уявного аргументу, синусом і косинусом (формула Ейлера). Асимптотичні формули (д3.1), (д3.2), (д3.5) і (д3.6) підкреслюють цю аналогію

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

бачимо, що амплітуда  $u(x, y)$  сталих коливань.

$$u(x, y, t) = v(x, y) e^{i\omega t}$$

задовольняє хвильовому рівнянню

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = \Delta v + k^2 v = 0 \quad \Delta^2 \frac{\omega^2}{a^2}$$

Якщо рішення хвильового рівняння володіє радіальною симетрією  $u(x, y) = v(r)$  то функція  $v(kr)$  задовольняє рівнянню Бесселя нульового порядку.

Таким чином, функції

$$H_0^{(1)}(kr) e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(\omega t + kr)} \frac{1}{\sqrt{i}} + \dots = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (д3.7)$$

$$H_0^{(2)}(kr)e^{i\omega t} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(\omega t - kr)} \frac{1}{\sqrt{i}} + \dots \quad (д3.8)$$

є рішеннями рівняння коливань, що мають характер циліндричних хвиль.

Функція  $H_0^{(2)}(kr)e^{i\omega t}$  відповідає розбіжним циліндричним хвилям, а функція  $H_0^{(1)}(kr)e^{i\omega t}$  – сходяться циліндричним хвилям.

Другим важливим властивістю циліндрових функцій є їх поведінка при  $x \rightarrow 0$ . Функції  $H_v^{(1,2)}$  і  $N_v$  при  $x \rightarrow 0$  звертаються в нескінченність (так як  $J_v(0) = 0$ ), точніше,  $H_0^{(1)}(x), H_0^{(2)}(x), N_0(x) \sim \ln \frac{1}{x}$ , так як  $J_0(0) = 1$ ;  $J_v^{(1)}(x), x_v^{(2)}(x), N_v(x) \sim \frac{1}{x^v}$  при  $v > 0$ , так як  $J_v(x) \sim x^v$  при  $x \rightarrow 0$ .

Функції Ханкеля і Неймана нульового порядку є фундаментальними рішеннями рівняння  $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ , так як вони мають потрібну логарифмічну особливість при  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ . Наведемо (без доведення) точні вирази для головних членів розкладання цих функцій в околиці точки  $x = 0$ :

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots, \quad H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots, \\ H_0^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{x} + \dots$$

## 4.2. Функції Ханкеля і Неймана.

Як було відзначено, всяке рішення рівняння Бесселя нецілого порядку  $\nu$  виражається через функції  $J_\nu$  і  $J_{-\nu}$ . Встановимо зв'язок між функціями  $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}, N_\nu$  і  $J_\nu, J_{-\nu}$ .

Оскільки всяке рішення рівняння Бесселя при неціл  $\nu$  можна представити у вигляді лінійної комбінації функцій  $J_\nu(x)$  і  $J_{-\nu}(x)$ , то

$$H_\nu^{(1)}(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \quad (д3.9)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – постійні, що підлягають визначенню. Для головних членів асимптотичних розкладань, очевидно, має місце аналогічне рівність

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right)} = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) \quad (д3.10)$$

Перетворюємо аргумент другого доданка до виду  $\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}v + \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4} + \pi v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) \cos \pi v - \sin\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) \sin \pi v.$$

Скорочуючи обидві частини рівності (д3.10) на  $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$  і користуючись формулою Ейлера для лівої частини, одержуємо

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) = (C_1 + C_2 \cos \pi v) \cos\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin \pi v \sin\left(\frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right)$$

звідки

$$C_1 + C_2 \cos \pi v = 1, \quad -C_2 \sin \pi v = i$$

або

$$C_2 = \frac{1}{i \sin \pi v};$$

$$C_2 = -\frac{\cos \pi v - i \sin \pi v}{i \sin \pi v} = -C_2 e^{-i\pi v}. \quad (д3.11)$$

Підставимо (д3.11) в (д3.9), знаходимо:

$$H_v^{(1)}(x) = -\frac{i}{i \sin \pi v} J_v(x) e^{-i\pi v} - J_{-v}(x) \quad (д3.12)$$

Аналогічно

$$H_v^{(2)}(x) = \frac{i}{i \sin \pi v} J_v(x) e^{i\pi v} - J_{-v}(x) \quad (д3.13)$$

Користуючись формулою (д3.4'), визначаємо  $N_v(x)$ , отримаємо з (д3.12) і (д3.13):

$$N_v(x) = \frac{J_v(x) \cos \pi v - J_{-v}(x)}{\sin \pi v}. \quad (д3.14)$$

Формули (д3.12), (д3.13) і (д3.14) отримані для нецілих значень  $v$ . Для цілого значення  $v = n$  функції Ханкеля і Неймана можуть бути визначені з (д3.12), (д3.13) і (д3.14) за допомогою граничного переходу при  $v \rightarrow n$ . Переходячи в цих формулах до границі при  $v \rightarrow n$  і розкриваючи невизначеність за відомим правилом, матимемо:



$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k J_n(x)}{dx^k} - (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k J_n(x)}{dx^k} \quad (\text{д3.12})$$

')

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k J_n(x)}{dx^k} - (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k J_n(x)}{dx^k} \quad (\text{д3.13})$$

')

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k J_n(x)}{dx^k} - (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k J_n(x)}{dx^k} \quad (\text{д3.14})$$

')

Користуючись поданням функцій  $J_\nu$  і  $J_{-\nu}$  вигляді статечних рядів, можна отримати аналогічні вирази для  $N_\nu(x)$ , а також  $H_\nu^{(1)}(x)$  і  $H_\nu^{(2)}(x)$ .

Формули (д3.12) і (д3.13) можна розглядати як аналітичне визначення функцій Ханкеля. Існують, однак, і інші способи введення функцій Ханкеля.

Якщо  $\nu = n + \frac{1}{2}$ , то функції Ханкеля і Неймана виражаються в кінцевому вигляді через елементарні функції. Вчасності, при  $\nu = \frac{1}{2}$  маємо:

$$\begin{aligned} N_{1/2}(x) &= -J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \\ H_{1/2}^{(1)}(x) &= J_{1/2}(x) + iN_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} i \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i \left( x - \frac{\pi}{2} \right)} \\ H_{1/2}^{(2)}(x) &= J_{1/2}(x) - iN_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} i \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left( x - \frac{\pi}{2} \right)} \end{aligned}$$

#### 4.3. Функції Ханкеля і їх інтегральне представлення.

Прийmemo за межі інтегрування в інтегралі наступні значення:

$$w_0 = a_1 + i\infty, -\pi < a_1 < 0, w_1 = b_1 - i\infty, 0 < b_1 < \pi, \quad (\text{д4.1})$$

$$w_0 = a_2 - i\infty, 0 < a_2 < \pi, w_1 = b_2 + i\infty, \pi < b_2 < 2\pi, \quad (\text{д4.1a})$$

Відповідні шляхи, які повинні проходити за заштрихованими смугами тільки у віддаленій частині площини і в іншому є абсолютно довільними,

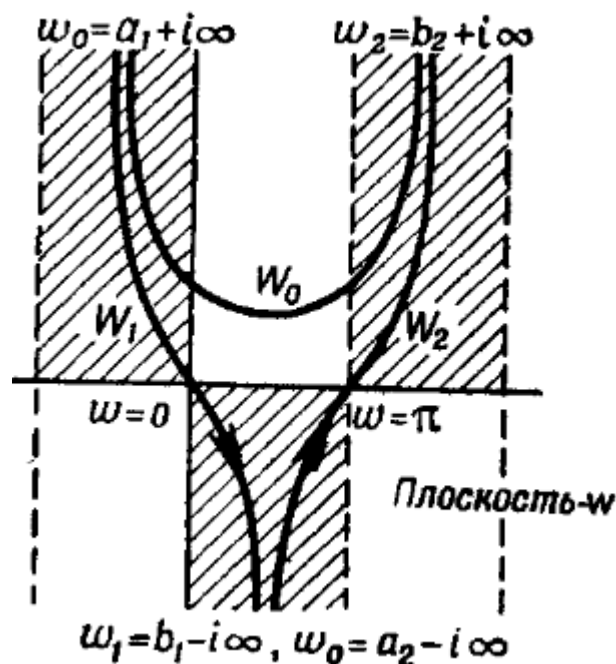
позначимо на фіг. Д4.1 через  $W_1$  та  $W_2$ . Той факт, що ми змусили їх проходити через точку  $w=0$  (відповідно  $w=\pi$ ), є для подальшого більш зручним, хоча і необов'язковим. Взагалі, шляхи  $W_1$  та  $W_2$ , так само як і колишній шлях  $W_0$ , могли б в кінцевій частині площини проходити і не по заштрихованій області.

$$c_n = \frac{1}{\pi} e^{-in\pi/2} \quad (д4.2)$$

Отримані таким чином циліндричні функції називаються *першою та другою функціями Ханкеля*.

$$H_n^1(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_1}^{\square} e^{i\rho \cos w} e^{i(w-\frac{\pi}{2})} dw, \quad (д4.3)$$

$$H_n^2(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_2}^{\square} e^{i\rho \cos w} e^{i(w-\frac{\pi}{2})} dw,$$



Фігура д4.1. Шляхи інтегрування  $W_1$  та  $W_2$  для функцій  $H^1$  та  $H^2$ . Послідовне проходження цих шляхів рівносильно шляху  $W_0$ .

У математичній фізиці вони грають не менш важливу роль, ніж Беселеві функції  $I_n$ . Від останніх вони відрізняються тим, що для  $\rho=0$  вони

перетворюються в нескінченність також і при додатних  $n$ . Дійсно, обидва інтеграла, отримувані з формули (3) при  $\rho=0$

$$\int_{W_1, W_2}^{\square} e^{i\left(w-\frac{\pi}{2}\right)} dw,$$

розбігаються в нескінченно віддаленій точці нижньої півплощини  $w$ .

Особливість  $H^1$  та  $H^2$ , що з'являється при  $\rho=0$ , ми докладніше розглянемо нижче. Загальний інтеграл цього рівняння можна тому представити у формі

$$Z_n(\rho) = C_1 H_n^1(\rho) + C_2 H_n^2(\rho). \quad (\text{д4.4})$$

Доведемо, що інтеграл  $I_n$  випливає з формули (4), якщо покласти  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ .

Для цього достатньо звернутися до фіг. д4.1; нижні частини обох шляхів  $W_1$  та  $W_2$ , пройдених послідовно, взаємно знищуються, та шляхи  $W_1$  та  $W_2$  можуть бути стягнуті у шлях  $W_0$ . Інтегруючи за останнім і враховуючи, що коефіцієнт  $c_n$  тепер визначається формулою (д4.1), одержимо :

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2} [H_n^1(\rho) + H_n^2(\rho)] \quad (\text{д4.5})$$

Розглянемо також різницю  $H_n^1 - H_n^2$ , яка для дійсних  $\rho$  і  $n$  є чисто уявною величиною, як це особливо ясно видно, якщо перейти до змінних інтегрування  $\beta$  і  $\gamma$ . Позначимо цю різницю через  $2i N_n$ ; функція  $N_n(\rho)$  називається *функцією Неймана*:

$$N_n(\rho) = \frac{1}{2i} [H_n^1(\rho) - H_n^2(\rho)]. \quad (\text{д4.6})$$

З формул (д4.5) і (д4.6) випливає

$$H_n^1(\rho) = I_n(\rho) + i N_n(\rho),$$

$$(д4.7)$$

$$H_n^2(\rho) = I_n(\rho) - i N_n(\rho).$$

У цьому розкладанні  $H^{1,2}$  є повною аналогією розкладання показової функції на її тригонометричні складові частини, що може бути виражено за допомогою наступної відповідності:

$$e^{ix} e^{-ix} \cos x \sin x$$

$$H^1(\rho) H^2(\rho) I(\rho) N(\rho) \quad .$$

У п. 4 побачимо, що ця аналогія має не тільки якісний характер, але що вона асимптотично (при  $\rho \rightarrow \infty$ ) переходить в кількісну відповідність. Аналогічно тому як у всіх коливальних процесах комплексне експоненціальне уявлення слід використовувати замість дійсного тригонометричного, подання за допомогою функцій Ханкеля, як правило, слід віддати перевагу над поданням за допомогою функцій Бесселя і Неймана, тим більше, що дійсні інтеграли і в тому і в іншому випадку добре виражаються через комплексні.

Функції  $H^1, H^2$ , можуть бути представлені для нецілих  $n$ .

$$2\pi e^{\frac{i\pi}{2}} I_n(\rho) = \int_{W_0}^{\square} e^{i\rho \cos w + i n w} dw. \quad (д4.8)$$

Для функції  $I_{-n}(\rho)$  отримуємо, замінюючи  $w$  на  $-w$  і  $W_0$  на  $-W_0$ , наступну формулу:

$$-2\pi e^{\frac{-i\pi}{2}} I_{-n}(\rho) = \int_{-W_0}^{\square} e^{i\rho \cos w + i n w} dw. \quad (д4.9)$$

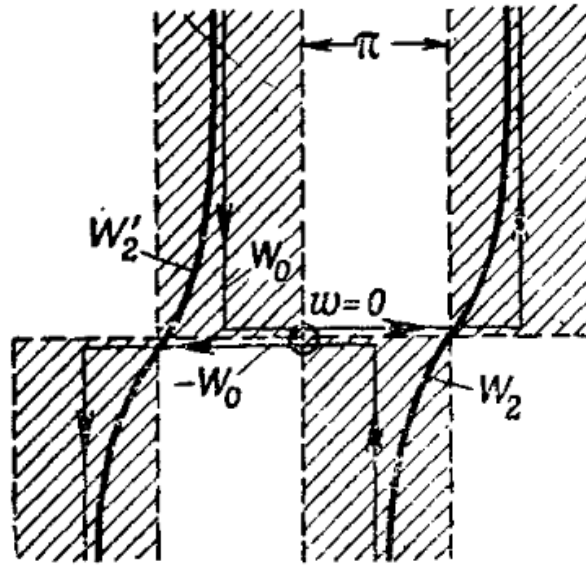


Рис.д4.2. Шляхи  $W_0$  і  $-W_0$ , що належать функціям  $I_n$  і  $I_{-n}$  еквівалентних шляхам  $W_2$  та  $W'_2$ , що належать функції  $H_n^2$ .

На рис. д4.2. обидва шляхи  $W_0$  і  $-W_0$  для більшої наочності мають прямокутну форму (напрямки обходу вказані стрілками). Ці шляхи взаємно знищуються в своїй середній частині між  $w = -\pi/2$  і  $w = +\pi/2$ . Частина, що залишається, складається з двох прямокутних ламаних ліній, які для наочності деформовані в криволінійні гілки подібно шляху  $W_2$  (фіг. д4.1). Правий шлях, що веде від  $\frac{\pi}{2} - i\infty$  до  $\frac{3\pi}{2} + i\infty$ , збігається з  $W_2$ , лівий – від  $\frac{-\pi}{2} + i\infty$  до  $\frac{-3\pi}{2} - i\infty$  позначимо через  $W'_2$ . Складаючи рівності (д4.8) і (д4.9), одержуємо

$$2\pi \left[ e^{\frac{i\pi}{2}} I_n(\rho) - e^{\frac{-i\pi}{2}} I_{-n}(\rho) \right] = \left( \int_{W_2} \square + \int_{W'_2} \square \right) e^{ip \cos w + inw} dw. \quad (\text{д4.10})$$

Тут інтеграл, взятий по  $W_2$  дорівнює:

$$\pi e^{i\pi/2} H_n^2(\rho). \quad (\text{д4.10a})$$

Інтеграл, взятий по  $W_2'$  відрізняється від першого тільки напрямком обходу і тим, що шлях інтегрування зрушено на  $-2\pi$ . Тому також цей інтеграл дорівнює

$$-\pi e^{\frac{-3in\pi}{2}} H_n^2(\rho). \quad (д4.10б)$$

Якщо підставити вирази (д4.10а) і (д4.10б) в рівність (д4.10), то після відповідних скорочень отримуємо

$$2[I_n(\rho) - e^{-in\pi} I_{-n}(\rho)] = (1 - e^{-2\pi n}) H_n^2(\rho)$$

і звідси

$$H_n^2(\rho) = \frac{e^{in\pi} I_n(\rho) - I_{-n}(\rho)}{i \sin n\pi}. \quad (д4.11)$$

Відповідне подання для  $H_n^1$  виходить в наступному вигляді:

$$H_n^1(\rho) = 2 I_n(\rho) - H_n^2(\rho) = \frac{e^{-in\pi} I_n(\rho) - I_{-n}(\rho)}{-i \sin n\pi}. \quad (д4.12)$$

Тим самим шукані коефіцієнти  $c_1, c_2$ , визначені для обох функцій Ханкеля. При цьому можна помітити, що в разі дійсного  $n$  і комплексного  $\rho$  маємо

$$H_n^1(\rho^*) = [H_n^2(\rho)]^*,$$

отже, також

$$H_n^2(\rho^*) = [H_n^1(\rho)]^* \quad (д4.13)$$

Тут значок  $*$  позначає, як усюди, комплексну сполучену величину. Застосовувалося співвідношення  $I_n(\rho^*) = [I_n(\rho)]^*$ , яке впливає, наприклад з формули (д4.15).

Далі впливає

$$H_{-n}^1(\rho) = e^{in\pi} H_n^1(\rho), H_{-n}^1(\rho) = e^{in\pi} H_n^1(\rho). \quad (\text{д4.13a})$$

Наведемо ще одну формулу, а саме

$$N_n(\rho) = \frac{\cos n\pi I_n(\rho) - I_{-n}(\rho)}{\sin n\pi} \quad (\text{д4.14})$$

### 3. Розкладання в ряд в околі нуля.

Функція  $I_n(\rho)$ , як бачили, регулярна усюди в кінцевій області. Тому вона допускає розкладання в ряд по зростаючим ступеням  $\rho$ . Дійсно, можна без праці переконатися, що диференціальне рівняння (д4.12) задовольняється наступним рядом:

$$I_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}, \quad (\text{д4.15})$$

який при  $n=0$  приймає особливо витончену форму, відому вже Фур'є:

$$I_0(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}. \quad (\text{д4.16})$$

Для того, щоб отримати ряди, що представляють циліндричні функції  $Z_n$  загального вигляду і одночасно досліджувати з'являється при  $\rho=0$  особливість, будемо чинити за методом, що застосовується в теорії звичайних диференціальних рівнянь. Покладемо

$$Z_n = \rho^\lambda (a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_k \rho^k + \dots) \quad (\text{д4.17})$$

і підставимо ряд (д4.17) в диференціальне рівняння, причому кожен член виходить при цьому ряду повинен звертатися в нуль. Член з нижчою ступенем  $\rho^{\lambda-2}$  дає тоді рівняння для визначення  $\lambda$ , загальний член  $\rho^{\lambda+k-2}$  - рекурентну формулу для  $a_k$ . Таким чином, отримуємо

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda-n^2=0, \lambda=\pm n \quad (\text{д4.18})$$

$$[(\lambda+k)(\lambda+k-1)+\lambda+k-n^2]a_k+a_{k-2}=0; \quad (\text{д4.18a})$$

останнє співвідношення, беручи до уваги рівність (д4.18), можна записати у вигляді:

$$(k^2+2k\lambda)a_k+a_{k-2}=0. \quad (\text{д4.18б})$$

Послідовним застосуванням рекурентного співвідношення (д4.18б) отримуємо при  $k=2m$

$$a_{2m}=\frac{-a_{2m-2}}{4m(m+\lambda)}=\frac{(-1)^2}{2^4}\frac{a_{2m-4}}{m(m-1)(m+\lambda)(m+\lambda-1)}=\dots$$

Щоб домогтися збігу з формулою (д4.15), покладемо  $a_0=\frac{1}{2^n}\Gamma(\lambda+1)$  і  $a_1=0$ , тоді

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m+n}}\frac{1}{m!\Gamma(m+\lambda+1)}, a_{2m+1}=0. \quad (\text{д4.19})$$

Формула (д4.15), таким чином, доведена. В силу формули (18) вона справедлива як для  $\lambda=-n$ , так і для  $\lambda=n$ . Отримуємо звідси, разом з  $I_n(\rho)$ , при  $\rho \rightarrow 0$  перше рішення за додатної дійсної частини  $n$  прагне до нуля, як  $\rho^n$ , а друге рішення прагне до нескінченності, як  $\rho^{-n}$ .

Проте все досі сказане в цьому пункті справедливо тільки для нецілих значень  $n$ . Для цілого  $n$  або, точніше, коли різниця коренів рівняння (д4.18) - ціле число, виникають відомі з теорії лінійних диференціальних рівнянь труднощі при отриманні рішення, відповідного меншому значенню  $\lambda$ , і пов'язані з появою логарифмічних членів. У нашому випадку це може бути показано таким простим способом.

Покладемо в рівнянні (д4.18б)  $\lambda=-n$  і  $k=2n$ , так що перший доданок перетворюється в нуль і, таким чином,  $a_{2n-2}=0$ . Якщо, застосовуючи рекурентну формулу, будемо переходити від коефіцієнта  $a_{2n-2}$  до коефіцієнтів



з меншими індексами, то в ряді (д4.17) для  $Z_n = I_{-n}$  перетворюються в нуль всі коефіцієнти, що передують коефіцієнту  $a_k = a_{2n}$ . Звідси випливає, так само як з ряду (д4.15), відоме нам співвідношення (д4.8а) між  $I_n$  і  $I_{-n}$ . Тому необхідно знайти інше, дійсно відмінне від  $I_n$  рішення диференціального рівняння Бесселя. Для цього застосуємо граничний перехід, вважаючи  $n$  як завжди близьким до цілого позитивному числу, беручи при цьому не функції Ханкеля  $H$ , а функції Неймана  $N$ , розгляд яких особливо важливо при визначенні характеру особливості рівняння Бесселя при  $\rho = 0$ . До переходу до межі для функції  $N$  залишається в силі формула (14); в межі внаслідок співвідношення (10а), ця формула приймає вид  $0/0$ . Граничне значення визначається за правилом Лопітала. Якщо тимчасово позначити граничне цілочисельне значення  $n$  через  $\bar{n}$ , то правило Лопітала дає для знаменника формули (д4.14) значення

$$\frac{\partial}{\partial n} \sin n\pi \zeta_{n=\bar{n}} = \pi \cos n\pi \zeta_{n=\bar{n}} = \pi (-1)^{\bar{n}}$$

а для чисельника

$$n\pi I_n(\rho) + \cos n\pi \frac{\partial}{\partial n} I_n(\rho) - \zeta \frac{\partial}{\partial n} I_{-n}(\rho) - \pi \sin \zeta$$

Таким чином,

$$\pi N_{\bar{n}}(\rho) = \lim_{n \rightarrow \bar{n}} \left[ \frac{\partial}{\partial n} I_n(\rho) - (-1)^{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial n} I_{-n}(\rho) \right]. \quad (\text{д4.20})$$

Знак границі вказує тут на те, що диференціювання по  $n$  потрібно призвести до переходу до межі, тобто при нецілому  $n$ . Так як нас цікавить насамперед околиця точки  $\rho = 0$ , то доцільно використовувати ряд (д4.15), який для нецілих  $n$  представляє не тільки функцію  $I_n$ , але і функцію  $I_{-n}$ . Обчислимо кожен з двох членів правої частини рівняння (д4.18) окремо.

Користуючись формулою  $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ , отримуємо, диференціюючи перший член ряду (д4.15):

$$\lim_{\square} \frac{\partial}{\partial n} I_n = \frac{1}{\Gamma(\bar{n}+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\bar{n}} \left[ \ln \frac{\rho}{2} - \frac{\Gamma'(\bar{n}+1)}{\Gamma(\bar{n}+1)} \right] + \dots, \quad (д4.21)$$

де через  $+\dots$  позначений залишок, утворений з наступних членів ряду, що мають при  $\rho \rightarrow 0$  вищий порядок малості, ніж  $\rho^{\bar{n}}$ . Далі, використовуємо введення Гауссом позначення

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = -C + \sum_{v=1}^{\infty} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{z+v} \right), \quad (д4.22)$$

де  $C$  - постійна Ейлера, рівна  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,5772$ .

Вважаючи:

$$C = \ln \gamma, \gamma = 1,781 \quad (д4.22a)$$

і користуючись формулами (22) і (22a), представимо вираз, у квадратних дужках у формулі (д4.21), у вигляді

$$\ln \frac{\rho}{2} - \Psi(\bar{n}) = \ln \frac{\gamma \rho}{2} - \sum_{v=1}^{\bar{n}} \frac{1}{v}. \quad (д4.22б)$$

З іншого боку, множник перед  $[\ ]$  у формулі (д4.21), з точністю до членів більш високого порядку, ніж  $\rho^{\bar{n}}$ , дорівнює  $I_n(\rho)$ . Користуючись виразом (д4.22б), можна тому записати формулу (д4.21) у вигляді

$$\lim_{\square} \frac{\partial}{\partial n} I_n = \left( \ln \frac{\gamma \rho}{2} - \sum_{v=1}^{\bar{n}} \frac{1}{v} \right) I_{\bar{n}}(\rho) \dots \quad (д4.23)$$

Три крапки означають, що рівність (д4.23) є наближенням з точністю до членів порядку вище  $\rho^{\bar{n}}$ . Трохи інакше проводиться підрахунок для другого члена правої частини формули (д4.20). Скористаємося поданням  $I_{-n}$  у вигляді ряду по  $\rho$ :

$$I_{-n} = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} \left[ \frac{1}{\Gamma(-n+1)} - \frac{1}{1! \Gamma(-n+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{\bar{n}}}{n! \Gamma(-n+\bar{n}+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2\pi} + \dots \right]. \quad (д4.34)$$

Звідси, якщо спочатку продиференціювати член  $\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n}$  по  $n$ , отримаємо, як і у формулі (д4.21), вираз

$$-\ln \frac{\rho}{2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} \left[ \frac{1}{\Gamma(-n+1)} - \dots + \frac{(-1)^{\bar{n}}}{n! \Gamma(-n+\bar{n}+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2\pi} \right] + \dots$$

Тому що всі знаменники, крім останнього, прагнуть до нескінченності при  $n \rightarrow \bar{n}$ , отримаємо в межі

$$-\ln \frac{\rho}{2} \frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\bar{n}} = (-1)^{\bar{n}+1} \ln \frac{\rho}{2} I_{\bar{n}}(\rho) + \dots \quad (д4.25)$$

З іншого боку, диференціюючи за  $n$  дужку [], що входить у формулу (д4.24), зважаючи, що при диференціюванні два знаки мінус взаємно компенсуються, оскільки для  $z = -n+1, -n+2, \dots$  отримуємо

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{-\Gamma'(z)}{[\Gamma(z)]^2} \frac{dz}{dn} = (-1)^2 \frac{\Gamma'(z)}{[\Gamma(z)]^2} = \frac{\Psi(z-1)}{\Gamma(z)},$$

одержуємо

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} \left[ \frac{\Psi(-n)}{\Gamma(-n+1)} - \frac{\Psi(-n+1)}{1! \Gamma(-n+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{\bar{n}} \Psi(-n+\bar{n})}{\bar{n}! \Gamma(-n+\bar{n}+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2\bar{n}} \right] + \dots \quad (д4.25а)$$

Але  $\Psi(z)$ , так само як і  $\Gamma(z+1)$ , має в точках  $z = -1, -2, -3$  прості полюси. Для околиці  $v$ -го полюса в силу формули (д4.22) маємо

$$\Psi(z) = \frac{-1}{z+v}. \quad (д4.26)$$

Розкладання  $\Gamma(z+1)$  для цієї ж точки має вигляд

$$\Gamma(z+1) = \frac{(-1)^{v-1}}{(v-1)!} \frac{1}{z+v}. \quad (д4.26а)$$

Отже,

$$\frac{\Psi(z)}{\Gamma(z+1)} = (-1)^v (v-1)! \text{ при } z = -v. \quad (д4.26б)$$

Навпаки, для околиці точки  $z=0$ , внаслідок рівностей  $\Gamma(1)=1$  і  $\Psi(0)=-C$ , матимемо

$$\frac{\Psi(z)}{\Gamma(z+1)} = -C = -\ln \gamma \quad (д4.26в)$$

Після цих підготовчих обчислень у виразі (д4.25а) можна перейти до межі. Всі множники  $\frac{\Psi}{\Gamma}$ , крім останнього, в силу формул (д4.26) і (д4.26а), приймають вигляд  $\frac{\infty}{\infty}$  і повинні бути, згідно з формулою (д4.26б), замінені виразами  $(-1)^v (v-1)!$ , де в першому члені  $v = \bar{n}$ , у другому -  $v = \bar{n}-1$  і т. д.,

В той час як для останнього члена, для якого справедливо рівність (д4.26в), одержуємо

$$\frac{-(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \ln \gamma \left( \frac{\rho}{2} \right)^{2\bar{n}} = (-1)^{\bar{n}} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{\bar{n}} \ln \gamma I_{\bar{n}}(\rho).$$

Таким чином, в якості граничного значення виразу (д4.25а) отримуємо

$$(-1)^n \left[ (n-1)! \left( \frac{\rho}{2} \right)^{-n} + \frac{(n-2)!}{1!} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{-n+2} + \dots - \ln \gamma I_n \right] + \dots \quad (д4.27)$$

Замість  $\bar{n}$  можна тепер писати  $n$ , причому і надалі  $n$  буде позначати ціле число.

Сума виразів (д4.27) і (д4.25) дає тепер для другого члена дужки [] у формулі (д4.20) такий вираз:

$$-(-1)^n \lim_{\square} \frac{\partial}{\partial n} I_{-n} = -(n-1)! \left( \frac{\rho}{2} \right)^{-n} - \frac{(n-2)!}{1!} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{-n+2} - \dots + \ln \frac{\gamma \rho}{2} I_n + \dots,$$

яке разом з виразом (д4.23) остаточно визначає таке значення для виразу при  $n > 0$ :

$$\pi N_n(\rho) = -\frac{\gamma \rho}{2} I_n - \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} + \dots \quad (д4.27^*)$$

$$= -(n-1)! \left( \frac{\rho}{2} \right)^{-n} - \frac{(n-2)!}{1!} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{-n+2} - \dots + 2 \ln \frac{\gamma \rho}{2}$$

Члени, які стоять праворуч, розташовані в порядку їх величини, член, що містить  $(\rho/2)^{-n}$ , має вищий, логарифмічний член - нижчий порядок. При  $n=0$  виходить проста логарифмічна особливість, так що можна писати

$$\frac{\pi}{2} N_0(\rho) = \ln \frac{\gamma \rho}{2} I_0 + \dots \quad (д4.28)$$

або в більш повній формі

$$\frac{\gamma \rho}{2} I_0(\rho) + \dots + 2 \left[ I_2(\rho) - \frac{1}{2} I_4(\rho) + \frac{1}{3} I_6(\rho) - \dots \right]. \quad (д4.28а)$$

$$\frac{\pi}{2} N_0(\rho) = \ln \frac{\gamma \rho}{2}$$

На доказі останнього співвідношення тут зупинятися не будемо. Ця логарифмічна особливість, згідно з формулою (д4.17), є не тільки в  $N$ , але і у уявній частини обох функцій  $H$ . Звідси робимо висновок, що нульова точка комплексній площині  $\rho$  є точкою розгалуження функцій  $H$  не тільки для нецілих, а й для цілих  $n$ . Після обходу навколо точки  $\rho=0$  значення функції  $H_n$  в силу формул (д4.7) і (д4.27) отримує приращення  $\mp 4 I_n(\rho)$ .

## 5. Рекурентні формули.

У той час як відносно  $\rho$  функції  $Z_n(\rho)$  задовільняють диференціальне рівняння, щодо  $n$  вони задовільняють рівнянню в кінцевих різницях при будь-якому, також і нецілому,  $n$ . Це впливає з нашого загального інтегрального представлення функцій  $H$ , звідки впливає справедливість відповідних формул також і для будь-яких лінійних комбінацій функцій  $H$ , зокрема для функцій  $I$  та  $N$ .

Беручи до уваги, що в шляхи інтегрування  $W_1$  і  $W_2$  не залежать від  $n$ , утворюємо наступні вирази:

$$\frac{\pi}{2}(H_{n+1}+H_{n-1})=\int e^{ip\cos\omega} e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}( )_1 d\omega, \quad (д4.29)$$

$$\frac{\pi}{2}(H_{n+1}+H_{n-1})=\int e^{ip\cos\omega} e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}( )_2 d\omega, \quad (д4.30)$$

де

$$(W_1)_1=\frac{1}{2}\left[e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right]=\sin\omega,$$

$$(W_2)_2=\frac{1}{2}\left[e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}-e^{-i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}\right]=-i\cos\omega.$$

Тому інтеграли в правих частинах рівнянь (д4.29) та (д4.30) можна записати у наступному вигляді

$$\frac{-1}{ip}\int \frac{\partial}{\partial\omega}(e^{ip\cos\omega})e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}d\omega, \quad (д4.29а)$$

$$\frac{-\partial}{\partial\rho}\int e^{ip\cos\omega}e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}d\omega; \quad (д4.30а)$$

причому вираз (д4.30а) інтегруванням частинами можна привести до вигляду

$$\frac{+n}{\rho}\int e^{ip\cos\omega}e^{i\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)}d\omega. \quad (д4.29б)$$

)

За допомогою цих перетворень праві частини формул (д4.29) і (д4.30) можуть бути тепер безпосередньо виражені через функцію Ханкеля індексу  $n$ . Однак формули, що будуть отримані на виході, справедливі при відповідному виборі шляху інтегрування як для  $H^1$ , так і для  $H^2$ , напишемо відразу ж для загальної циліндричної функції  $Z$  як лінійної комбінації  $H^1$  і  $H^2$ . При цьому формули приймають вид

$$Z_{n+1} + Z_{n-1} = \frac{2n}{\rho} Z_n, \quad (\text{д4.31})$$

та

$$Z_{n+1} - Z_{n-1} = -2 \frac{dZ_n}{d\rho}. \quad (\text{д4.32})$$

Формули (д4.31) і (д4.32) є рекурентними формулами, які ми шукали, вони характеризують залежність циліндричної функції  $Z_n$  від змінної  $n$ . Вони мають місце при будь-якому  $n$ , цілому або нецілому, позитивному або негативному.

При  $n=0$  отримуємо звідси, зокрема,

$$Z_{-1} = -Z_{+1} \quad (\text{д4.31a}) \quad ($$

та

$$Z_1 = \frac{-dZ_0}{d\rho}. \quad ($$

32a)

(д4.

Вважаючи в формулі (д4.32a)  $Z$  рівний функції Бесселя, одержуємо співвідношення, що впливає, втім, безпосередньо з рядів (д4.8) та (д4.8a),

$$I_1(\rho) = \frac{-d}{d\rho} I_0(\rho). \quad (\text{д4.32б})$$

## 5.2. Асимптотичне представлення функції Ханкеля.

Підінтегральний вираз інтеграла (д4.3) в незаштрихованих областях площини  $\omega$  коливається зі зростанням  $\rho$  все швидше із зростаючою амплітудою, в той час як амплітуди коливань цього виразу в заштрихованих областях прагнуть до нуля. Шляхи інтегрування  $W_1$  та  $W_2$  в інтегралах, що

представляють функції  $H^1$  та  $H^2$ , у випадку реального  $\rho$  проходять тільки по заштрихованій області, як це було показано вже на фіг. 19. Для комплексного  $\rho$  такий випадок не має місця. Вже з розгляду фіг. д3.1 випливає, що точки  $\omega=0$  та  $\omega=\pi$  шляхів  $W_1$  і відповідно  $W_2$ , що лежать на границі між двома незаштригованими областями, повинні відігравати особливу роль при асимптотичному визначенні функцій  $H^1$  та  $H^2$ .

Введемо наступні припущення:

$$\rho \text{ дійсне; } \rho \gg 1 \text{ та } n \ll \rho. \quad (д4.33)$$

Шлях  $W_1$ , що відповідає функції  $H^1$ , починається і закінчується в заштригованій області. Те ж саме має місце для шляху  $W_2$ , відповідного функції  $H^2$ . Показник  $i\rho \cos \omega$ , що відіграє вирішальну роль, досягає екстремуму, якщо

$$\sin \omega = 0, \text{ тобто } \begin{cases} \omega = 0; \text{шляху } W_1, \\ \omega = \pi; \text{шляху } W_2. \end{cases}$$

Однак, як це завжди має місце для дійсної або уявної частини аналітичної функції, точки  $\omega=0$  та  $\omega=\pi$  не дають дійсного максимуму або мінімуму, а є так званими «сідловими» точками. Праворуч і ліворуч від шляхів  $W_1$  і  $W_2$  підносяться в цих точках хребти, що круто піднімаються. Між ними проходять шляхи  $W_1$  та  $W_2$ , що схожі на перевали. Тому замість терміну «метод сідлових точок» вживають також термін «метод перевалу». Висота перевалу при  $\omega=0$  та при  $\omega=\pi$  дорівнює  $|e^{i\rho}|=1$  та  $|e^{-i\rho}|=1$ .

Розглянемо невелику ділянку шляху  $W_1$ , в околиці найбільш високою точки перевалу. Нехай  $ds$  означає елемент шляху, відлічуваний в напрямку позитивного обходу шляху  $W_1$ , а  $s=0$  - сама точка перевалу.

Отже

$$\omega = se^{iy}, i\cos \omega = i \left( 1 - \frac{s^2}{2} e^{2iy} \right) = \frac{s^2}{2} \sin 2y + i \left( 1 - \frac{s^2}{2} \cos 2y \right). \quad (д4.34)$$

Оскільки лінії рівня дійсної частини функції  $i\cos \omega$  перпендикулярні до ліній рівня уявної частини і своїм власним лініям спаду, то лінія рівня уявної частини є одночасно шуканою лінією спаду дійсної частини (остання визначає висоту перевалу). Лінія рівня уявної частини функції (д4.34), що нас цікавить, визначається рівнянням

$$1 - \frac{s^2}{2} \cos 2\gamma = C ,$$

При чому  $C=1$  , так як шлях повинен проходити через точку перевалу  $s=0$  ; звідси випливає

$$\cos 2\gamma = 0, \gamma = \mp \frac{\pi}{4} . \quad (д4.34а)$$

У випадку  $H^1$  ми повинні вибрати верхній знак  $\gamma$  (див. фіг. д4.1), так що формули (д4.34) приймають такий вигляд:

$$\omega = e^{-i\pi/4} s, d\omega = e^{-i\pi/4} ds, i \cos \omega = i - \frac{s^2}{s} \quad (д4.34б)$$

Підставами цей вираз для  $\omega$  у формули (д4.3) і одночасно приймемо  $s$  рівним нулю в «повільно змінюваному» множнику  $\exp[i(\omega - \pi/2)]$  ; при інтегруванні можна, очевидно, обмежитися найближчою околицею точки перевалу, вважаючи, наприклад, що відстань  $|s|$  від перевалу менше як завгодно малого, але фіксованого числа  $\varepsilon$  . В результаті отримаємо

$$H_n^1(\rho) = \frac{1}{\pi} e^{i\left[\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{\frac{-\rho}{2}s^2} ds . \quad (д4.34в)$$

Заміна змінних  $s = \sqrt{2/\rho} t$  , при якій межі інтегрування  $+\varepsilon$  і  $-\varepsilon$  замінюються межами

$$\sqrt{\frac{\rho}{2}} \varepsilon \rightarrow \infty \quad \text{та} \quad -\sqrt{\frac{\rho}{2}} \varepsilon \rightarrow -\infty ,$$

перетворює інтеграл в інтеграл Лапласа. Звідси випливає остаточно

$$H_n^1(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\rho\pi}} e^{i\left[\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} . \quad (д4.35)$$

У випадку  $H^2$  , коли сідловою є точка  $\omega = \pi$  , потрібно використовувати шлях  $W_2$  і у формулі (34а) вибрати нижній знак  $\gamma$  . Тоді відповідно отримуємо

$$H_n^2(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\rho\pi}} e^{-i\left[\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \quad (д4.36)$$

Нарешті, беручи напівсуму виразів (д4.35) і (д4.36), приходимо до формули

$$I_n(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\rho\pi}} \cos\left[\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] . \quad (д4.37)$$

Ці асимптотичні уявлення отримані в припущенні дійсного  $\rho$  , однак вони можуть бути аналітично продовжені в комплексну площину  $\rho$  , причому



остання у випадку функції Ханкеля  $H$  повинна мислитися розрізаною по відповідною напівосі, внаслідок розгалужень, про які йшлося в п. 3. На підставі рівностей (д4.35) і (д4.36) можна стверджувати, що  $H^1$  асимптотично прагне до нуля у верхній,  $H^2$  - у нижній півплощині  $\rho$ . Ця обставина робить особливо зручним застосування функцій Ханкеля для проблем затухаючих, коливань. Навпаки, функція Бесселя  $I$  (так само як і функція Неймана  $N$ ) асимптотично прагне до нескінченності в обох півплощинах.

Наявність в асимптотичних формулах (д4.35) і (д4.36) множника  $\rho^{-1/2}$  пов'язано з тією обставиною, що функція  $H_0^1$  (або  $H_0^2$  при протилежному законі залежності від часу) являє собою циліндричну хвилю, що розповсюджується, якщо розглядати змінні  $r$ ,  $\phi$  разом з третьою координатою  $z$ , перпендикулярної до площини  $r$ ,  $\phi$ , як циліндричні координати в просторі, причому джерело хвилі лежить в точці  $r=0$ . Так як енергія, що проходить через будь-який циліндр радіуса  $r$  з віссю  $r=0$ , дорівнює  $2\pi r |H_0|^2$  і (у разі відсутності поглинання) не повинна залежати від  $r$ , то звідси дійсно, впливає пропорційність  $|H_0|$  і  $r^{-1/2}$  або, що те ж,  $|H_0|$  і  $\rho^{-1/2}$ .

Поверхня, що зображає функцію  $\text{Re} (H_0^1)$ , експоненціально наближається до верхньої напівплощини  $\rho$ , а над нижньою напівплощиною ця поверхня складається з «хребтів», що експоненціально піднімаються та перемежуються долинами, що усе більше поглиблюються. Поверхня, що належить функції  $\text{Im} (H_0^1)$ , має аналогічний вид і володіє, крім того вузькою воронкою в нулі, що відповідає логарифмічній особливості функції  $H_0$  [остання аналогічна особливості функції  $N_0$  у формулі (д4.28)], а також розривна уздовж негативною дійсної осі (відповідно з розгалуженням функції  $H_0$  при обході навколо точки  $\rho=0$ ). Поверхня, що зображає функцію  $\text{Re} (I_0)$ , складається з пологої хвилеподібної лощини, обмеженої з обох сторін гірськими ландшафтами, що піднімаються. Хвилеподібний вигляд русла лощини впливає з асимптотичної формули (д4.37) і вказує на існування нескінченного числа коренів рівняння  $I_0=0$  уздовж дійсної осі. Ці корені зображені на рис.д4.. Поверхня, що зображає функцію  $\text{Im} (I_0)$ , має аналогічний вигляд, тільки в

цьому випадку дно лощини усюди горизонтальне, відповідно з тією обставиною, що функція  $I_0$  уздовж дійсної осі має дійсні значення.

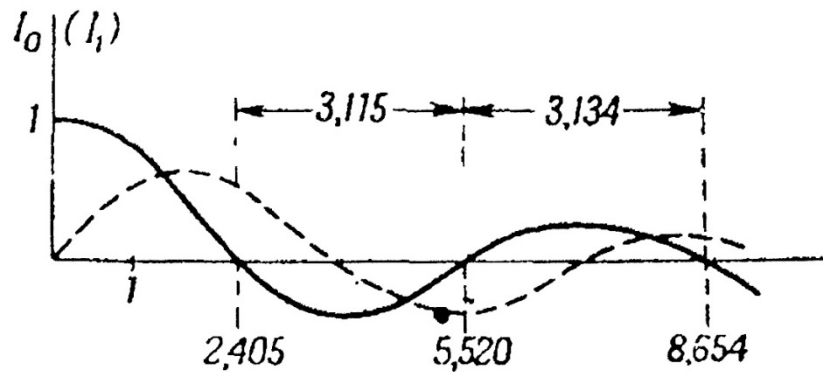


Рис.д4.3. Графіки функцій  $I_0(x)$  (суцільна крива) та  $I_1(x)$  (пунктирна крива) для дійсних значень фргументу. Вказані також значення перших трьох коренів рівняння  $I_1(\rho)=0$ .

## 6. Література

1. Хенл Х. Теория дифракции [Текст]: [пер.с немец.] / (Вахитова Н.Г., Иванова В.И., Сажарова М.П., под редакц. Г.Д.Малюжинца) Х.Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль – М.: «Мир», 1964 –428с.; 26.5см – Библиография: с.14, с.65 – 67, с.104 – 108, с.224 – 230, с.332 – 336, с.419 – 423. Перевод изд.: TheoriederBeugungvonH. Hönl, A.W.Maue, K. Westpfahl. Handbuch der Physik. Herausgegeben von S. Flügge. Band. XXV/1, s.218. Springer – Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg. 1961.
2. Марков Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн [Текст] / Г.Т. Марков, А.Ф.Чаплин М. – Л., «Энергия», 1967 – 376с.:ил.
3. Гольдштейн Л.Д. Электромагнитные поля и волны [Текст] / Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. М.:»Советское радио»,1956. – 633с.; ил.: - Библиогр.:с.624, Пред.указ.:с.625 – 633 .
4. Менцер Дж.Р. Диффракция и рассеяние радиоволн [Текст]: [Перевод с англ.Под ред.Л.А.Вайнштейна] - М: «Советское радио».1958 – 148с.Перевод изд.: Scatteringand Diffraction of Radio Wave /J.R. Mentzer. Pergamon Press. London & N.Y. 1965
5. Потехин А.И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. [Текст]/ А.И. Потехин – М.: Изд. «Советское радио», 1948. – 135с.: ил.; - Библиогр.: с.133 – 134.
6. Уфимцев П.Я. Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции.[Текст]/ П.Я. Уфимцев.; Пер.с англ. – 2 – е изд. испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2012. – 372с.;

Библиогр.: с.338 – 353. Авт.и предм.указ.: с.367 – 373. Перевод изд.: Theory of Edge Diffraction in Electromagnetics. P.Y,Ufimtsev. Tech.Science Press.

7. Вайнштейн Л.А. Теория дифракции и метод факторизации [Текст]/Л.А.Вайнштейн. – М.: «Советское радио» 1966. – 431с. Библиогр.: с.422 – 430.

8. Бабич В.М. Метод Зоммерфельда – Малюжинца в задачах дифракции. [Текст]/В.М. Бабич, М.А. Лялилов, В.Э. Грикунов. – С. -П.Изд.С. Петербургского гос.Университета. – 2003. – 101с. Библиогр.: с.99 – 101.

9. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.[Текст]/В.А.Фок. – М.: «Советское радио»,1970. – 520с. Библиогр.: с.515 – 517.

10. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.[Текст]/ Б.Нобл. – М.: Изд.ин.лит.,1962. – 279с. Библ.:с.265 – 271. Указ.:с.272 -277.

Перевод. изд.: Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for solution of partial Differential equation/ B.Noble. Pergamon Press. 1958.